

Modelos alternativos de valoración de opciones sobre acciones: una aplicación al mercado español

Ángel León Valle*

Departamento de Economía Financiera
Universidad de Alicante

Gregorio Serna Calvo**

Departamento de Economía Financiera
Universidad de Castilla-La Mancha

Resumen

En este trabajo se analiza el comportamiento, tanto dentro como fuera de la muestra, de varios modelos basados en diferentes distribuciones para la modelización del activo subyacente en opciones de compra sobre acciones individuales que cotizan en MEFF. Estas opciones de compra, aunque son americanas, se comportan como europeas en nuestra muestra pues no existe reparto de dividendos en ninguna de las acciones seleccionadas como activo subyacente durante la vida de las opciones correspondientes. En concreto, se analizan los modelos semiparamétricos de Corrado-Su (1996a) y Jondeau-Rockinger (2001), y el modelo basado en la mixtura de distribuciones lognormal de Bahra (1997), comparándolos con el modelo original de Black-Scholes (1973). Los resultados indican que los modelos de Corrado-Su y Jondeau-Rockinger mejoran frente a Black-Scholes y la mixtura de distribuciones lognormal, si bien no consiguen eliminar por completo el conocido efecto sonrisa de volatilidad.

Palabras clave: Gram-Charlier, modelo de Corrado-Su, asimetría, curtosis, mixtura de lognormales.

Clasificación JEL: C13, C14, G12, G13.

Abstract

This paper is about testing different call option models on individual stocks traded on MEFF, the Spanish market of trading futures and options. These call options are American ones, but in practice, they behave as European options since the underlying assets in our selected sample do not deliver dividends during the life of their respective options. We implement the models of Corrado-Su (1996a), Jondeau-Rockinger (2001), the lognormal mixture of Bahra (1997) and the benchmark model of Black-Scholes (1973). Our results show, by either an in-sample or an out-of-sample analysis, that Corrado-Su and Jondeau-Rockinger are better than the Black-Scholes and the lognormal mixture but they do fail to eliminate completely the volatility smile pattern.

Keywords: Gram-Charlier, Corrado-Su model, skewness, kurtosis, lognormal mixture.

JEL Classification: C13, C14, G12, G13.

1. Introducción

A pesar del enorme éxito que ha alcanzado el modelo de valoración de opciones de Black-Scholes (1973), está ampliamente documentada en la literatura su tendencia a valorar erróneamente opciones muy dentro o muy fuera de dinero. Esta inconsistencia ha sido

* Ángel León agradece la financiación del Ministerio de Ciencia y Tecnología BEC2002-3797 y también la financiación de la Fundación BBVA, 1/BBVA 00044.321-15466/2002.

** Gregorio Serna agradece la financiación del Ministerio de Ciencia y Tecnología SEC2003-04070 y de la Junta de Castilla-La Mancha PAC2002-001.

Fecha de esta versión: noviembre de 2004.

comúnmente conocida como «sonrisa de volatilidad» (o *volatility smile* en la literatura anglosajona). Este hecho se debe a la hipótesis poco realista del modelo de Black-Scholes, BS para abreviar, según la cual el precio del activo subyacente sigue un movimiento browniano geométrico con volatilidad constante.

Han aparecido en las dos últimas décadas numerosos trabajos que tratan de solventar los problemas implícitos en BS modificando alguno de sus supuestos, que podemos clasificar en los siguientes dos grupos. En primer lugar, tendríamos los modelos que tratan de modificar el proceso que sigue el activo subyacente, ya sea considerando procesos de difusión con saltos, Merton (1976), Bates (1996a), modelos de volatilidad estocástica (Hull y White, 1987), Heston (1993) o una combinación de ambos, Bates (1996b), Bakshi, Cao y Chen (1997) y (2000).

Sin embargo, como señalan Melick y Thomas (1997) y Jurczenko, Maillet y Negrea (2000a) entre otros, es posible encontrar infinitos procesos estocásticos consistentes con una única distribución para el precio del subyacente en el momento del vencimiento. Además, como es bien conocido, el supuesto de BS según el cual el proceso que sigue el activo subyacente es un movimiento browniano geométrico es equivalente a asumir una distribución lognormal para el precio del activo subyacente en el momento del vencimiento. De hecho, el conocido efecto sonrisa de volatilidad puede interpretarse como una consecuencia de la presencia de asimetría y curtosis no normales en las distribuciones de los rendimientos de los activos.

Por tanto, en lugar de establecer un proceso estocástico concreto, podemos pensar en especificar una forma funcional para la distribución del precio del activo subyacente en el momento del vencimiento de la opción. A su vez, dentro de este grupo de modelos cabe destacar los llamados modelos no paramétricos, como los de Ait-Sahalia y Lo (1998), Rubinstein (1994), Jackwerth y Rubinstein (1996) y Jondeau y Rockinger (2002) entre otros. Aquí se encuadrarían también los modelos semiparamétricos¹, surgidos a partir del trabajo pionero de Jarrow y Rudd (1982), basados en expansiones en serie de Gram-Charlier o de Edgeworth, como la serie de trabajos de Corrado y Su (1996a, 1996b, 1997a, 1997b), Backus, Foresi, Li y Wu (1997) o Jondeau y Rockinger (2000, 2001). Por otra parte, los modelos paramétricos tratan de especificar directamente una distribución alternativa a la lognormal, pero con mayor grado de flexibilidad que le permita incorporar las regularidades empíricas observadas en los mercados. Así, podríamos hablar de los modelos de tres o cuatro parámetros, como los de Ritchey (1990) y Bahra (1997), Lim, Martin y Martin (2000) y Corrado (2001).

Este trabajo se centrará en analizar el comportamiento empírico de dos de los modelos semiparamétricos más populares, Corrado-Su y Jondeau-Rockinger, y uno de los modelos paramétricos más difundidos, como es el basado en una mixtura de distribuciones lognormal, en su versión de Bahra (1997), comparándolos con el marco de referencia usual en este tipo de trabajos que es el modelo de BS. Para ello, se utilizarán opciones de compra sobre activos individuales negociadas en MEFF². Hay que destacar que si bien la evidencia empírica sobre el comportamiento de modelos alternativos a BS en el mercado de opciones sobre el Ibex 35 es bastante amplia (véanse, por ejemplo: Prado, 2004; Serna, 2003 y 2004; Ferreira,

¹ Véase la excelente clasificación y discusión de estos modelos que realizan JURCZENKO, MAILLET y NEGREIA (2002a, 2002b).

² Como se señalará posteriormente en la sección 2, si bien las opciones sobre activos individuales negociadas en MEFF son americanas, dado que durante el periodo de estudio no se produjeron pagos de dividendos, las opciones de compra pueden ser consideradas como europeas.

Gago, León y Rubio, 2004), la evidencia empírica en el caso de opciones sobre activos individuales es mucho más limitada. Por otra parte, es interesante estudiar hasta qué punto los resultados obtenidos anteriormente para el mercado de opciones sobre el Ibex 35 pueden ser extrapolados al caso de opciones sobre activos individuales, caracterizadas por un menor grado de liquidez y por su potencial de menor utilidad como cobertura de carteras.

El resto de este trabajo se organiza del siguiente modo: en las secciones segunda y tercera se describen los modelos de valoración empleados y la base de datos respectivamente. El proceso de estimación de los parámetros en cada uno de los modelos estudiados, se detalla en la sección cuarta. En la sección quinta, se presentan los resultados obtenidos, tanto dentro como fuera de la muestra. Por último, en la sección sexta se presentan las conclusiones del trabajo.

2. Modelos de valoración de opciones³

2.1. Introducción

Sea C_t el valor en t de una opción call europea con vencimiento en T , precio de ejercicio K y precio del activo subyacente S_t . Bajo la medida neutral al riesgo $\mathbb{Q}$, el valor de la opción sería:

$$C_t = e^{-r\tau} \int_K^{+\infty} (S_T - K)g(S_T)dS_T \quad [1]$$

siendo $g(\cdot)$ la función de densidad de S_T bajo la medida neutral donde la dinámica de S_T podríamos representarla como:

$$S_T = S_t \exp(\mu_\tau^* - \sigma_\tau^2/2 + \sigma_\tau \xi) \quad [2]$$

donde $\sigma_\tau = \sigma\sqrt{\tau}$, $\tau = T - t$ y ξ es una variable aleatoria (v.a.) de media cero y varianza unitaria. Los diferentes modelos que vamos a obtener a continuación estarán basados en diferentes distribuciones de ξ y asegurándose que se cumple la restricción de martingala (Longstaff, 1995), o sea:

$$E_t^{\mathbb{Q}}[S_T] = \exp(r\tau)S_t \quad [3]$$

2.2. El modelo de Black-Scholes

Obsérvese que cuando la v.a. ξ en [2] sigue una distribución normal estándar, entonces S_T en [2] sigue una distribución lognormal y por tanto, la ecuación [1] es la fórmula de Black-Scholes (1973), que denotaremos como BS para abreviar, o sea:

$$C_t^{BS} = S_t N(d_1) - Ke^{-r\tau} N(d_2) \quad [4]$$

³ Esta sección constituye una versión reducida del trabajo actual en curso por LEÓN y PRADO (2004), sobre la valoración de opciones sobre el Ibex-35 bajo diferentes distribuciones del activo subyacente y en un entorno de carácter semiparamétrico fundamentalmente.

donde $N(\cdot)$ representa la función de distribución de la normal estándar, el valor de d_1 es igual a

$$d_1 = \frac{\log(S_t/K) + r\tau + \sigma_\tau^2/2}{\sigma_\tau} \quad [5]$$

y por último, $d_2 = d_1 - \sigma_\tau$

2.3. El modelo de Corrado-Su y extensiones

2.3.1. Función de densidad y restricción de martingala

El modelo de Corrado-Su (1996a), que denotaremos como CS a partir de ahora, supone trabajar con un recorte hasta cuarto orden de la función de densidad Gram-Charlier de tipo A (Stuart y Ord, 1977) para la v.a. ξ , es decir:

$$f(\xi) = \phi(\xi) \left[1 + \frac{sk}{\sqrt{3}!} + H_3(\xi) + \frac{eku}{\sqrt{4}!} H_4(\xi) \right] \quad [6]$$

donde $\phi(\cdot)$ es la función de densidad de la normal estándar, sk representa la asimetría, eku representa el exceso de curtosis⁴ y $H_i(\cdot)$ representa el polinomio de Hermite normalizado de orden i siendo sus valores para los órdenes tercero y cuarto los siguientes:

$$H_3(\xi) = \frac{1}{\sqrt{3}!} (\xi^3 - 3\xi) \quad H_4(\xi) = \frac{1}{\sqrt{4}!} (\xi^4 - 6\xi^2 + 3)$$

Nótese que para $sk = 0$ y $eku = 0$ se verifica que $f(\xi)$ es la densidad de la normal estándar. La función de densidad en [6] es una densidad bajo la medida real, sin embargo, estamos interesados en la densidad de ξ bajo $\mathbb{Q}$ para la valoración de opciones. Si aplicamos la restricción de martingala en [3], se verifica que la densidad de ξ bajo $\mathbb{Q}$ es la expresión [6] pero sujeta a la siguiente restricción:

$$\mu_\tau^* = r\tau - \log \left(1 + \frac{sk}{3!} \sigma_\tau^3 + \frac{eku}{4!} \sigma_\tau^4 \right) \quad [7]$$

donde la obtención de [7] puede verse en Jurczenko, Maillet y Negrea (2002a) y en León, Mencía y Sentana (2004).

2.3.2. Valoración de la *call* europea

La fórmula que presentamos a continuación no corresponde a la fórmula original de Corrado-Su (1996a), sino a una fórmula posterior obtenida por Jurczenko, Maillet y Negrea

⁴ $eku = ku - 3$, donde ku representa la curtosis.

(2002b), que abreviaremos por JMN. Estos autores no sólo incorporan el error en el término de la sensibilidad del precio de la *call* europea en CS con respecto a la asimetría que fue detectado por Brown y Robinson (2002) sino también introducen la restricción de martingala [7] en la fórmula. Representaremos esta versión corregida del modelo CS como CS*. La fórmula de valoración sería:

$$C_t^{CS*} = C_t^{BS*} + sk Q_3 + eku Q_4 \quad [8]$$

donde

$$Q_3 = \frac{S_t \sigma_\tau P_3(d_1^*) \phi(d_1^*)}{3!(1 + \omega_\tau)} \quad Q_4 = \frac{S_t \sigma_\tau P_4(d_1^*) \phi(d_1^*)}{4!(1 + \omega_\tau)} \quad [9]$$

y siendo,

$$\begin{aligned} P_3(y) &= 2s_t - y \\ P_4(y) &= y^2 - 3ys_t + 3s_t^2 - 1 \\ d_1^* &= d_1 - \log(1 + w_t)/s_t \\ w_t &= \frac{sk}{3!} s_t^3 + \frac{eku}{4!} s_t^4 \end{aligned}$$

Finalmente, C_t^{BS*} es la ecuación [4], o sea la fórmula BS, pero sustituyendo d_1 representado en [5] por d_1^* . En resumen, podemos decir que la fórmula CS en [8] es una extensión de BS pues incorpora además los posibles efectos de la asimetría y curtosis implícitos en la distribución del activo subyacente sobre la *call* europea. Estos efectos se captan mediante las sensibilidades del valor de la opción ante variaciones de la asimetría, medido por el coeficiente Q_3 , y variaciones en el exceso de curtosis mediante Q_4 .

2.3.3. Extensiones

El inconveniente del modelo CS al igual que CS* es que la función de densidad [6] no es realmente una densidad que cumpla las propiedades deseables de: (i) valores positivos y (ii) área unitaria bajo la función de densidad, pues es una aproximación, como se ha mencionado al principio de esta sección, basada en recortar una densidad con infinitos términos que es la expansión de Gram-Charlier de Tipo A. Una solución a este problema es la establecida por Jondeau-Rockinger (2001), JR para abreviar, que consiste en restringir los valores de sk y eku para que la densidad [6] cumpla las propiedades deseables. Denotemos como C_t^{JR} al valor de la *call* europea que sería la ecuación [8] pero con valores para sk y eku pertenecientes al conjunto $\mathfrak{S} \subset \mathbb{R}^2$ donde $\mathfrak{S}$ representaría todos aquellos vectores (eku, sk) tal que la densidad cumpla las propiedades (i) y (ii). La restricción en los parámetros nos conduce a que $eku \in (0, 4)$ y $sk \in (-1,05, 1,05)$ donde ambos parámetros no se mueven libremente dentro sus respectivos conjuntos sino que el valor de un parámetro está en función del otro, es decir, $sk = sk(eku)$. Esto implica que la representación gráfica de $\mathfrak{S}$ no sea el interior de un rectángulo pues aproximadamente sería el interior de una elipse aproximadamente como puede verse en el gráfico 3 en Jondeau-Rockinger (2001).

Otra posible solución al problema de la densidad aproximada en [6] sería la aplicación de la densidad semiparamétrica (SNP) de Gallant y Nychka (1987), que garantizan las propiedades (i) y (ii) anteriores y cuyas propiedades se analizan con detalle en León, Mencía y Sentana (2004), LMS para abreviar. Estos autores demuestran que el conjunto de los vectores (eku, sk) es menos restrictivo que en JR, de hecho este nuevo conjunto Ψ contiene a $\mathfrak{S}$, o sea, $\mathfrak{S} \subset \Psi$. Además, se obtienen fórmulas de valoración cerradas para la opción call europea siendo el modelo CS un caso particular de éste obtenido mediante aproximación, también para opciones asiáticas, etc.

2.4. *Mixtura de distribuciones lognormales*

Volviendo al modelo CS y extensiones, obsérvese que la idea sería captar mejor la dinámica del activo subyacente dándole mayor libertad a los valores de la asimetría y exceso de curtosis donde en BS estaba restringido a los valores de cero para ambos, en JR el conjunto $\mathfrak{S}$ y en LMS el conjunto Ψ . Una alternativa a los modelos anteriores es la conseguida mediante la mixtura de distribuciones lognormal (MLN) para el activo subyacente. La opción call europea que conseguimos mediante esta nueva distribución, que representamos como C_t^{MLN} , será una mixtura de la fórmula BS. Evidencia empírica sobre este tipo de modelización puede verse en los trabajos pioneros sobre la mixtura de lognormales de Ritchey (1990) y Bahra (1997) para el caso de opciones europeas y para el caso de opciones americanas, el trabajo de Melick y Thomas (1994).

En definitiva, el modelo de valoración de acuerdo con la terminología usada en Bahra (1997) sería:

$$C_t^{MLN} = \sum_{j=1}^J \pi_j C_{j,t}^{BS} \quad \sum_{j=1}^J \pi_j = 1 \quad \pi_j \in (0, 1)$$

$$C_{j,t}^{BS} = e^{-rt} [F_{j,t} N(d_{1j}) - KN(d_{1j} - \beta_j)] \quad [10]$$

donde

$$c_{1j} = \frac{\log(F_{j,t}/K) + \beta_j^2/2}{\beta_j} \quad F_{j,t} = \exp(\alpha_j^* + \beta_j^2/2) \quad [11]$$

Representaremos como Φ al conjunto de parámetros que hay en [10] siendo $\Phi = \{\pi_j, \alpha_j^*, \beta_j\}_{j=1}^N$. Para el caso de $J = 2$, que es el que analizaremos en nuestra sección empírica, tendríamos un total de 5 parámetros aunque lo restringiremos finalmente a 3 parámetros pues supondremos que $\alpha_j^* = 0$. En resumen, tendremos el mismo número de parámetros a estimar bajo los tres modelos siguientes: CS*, JR y MLN.

Por último, mencionar que los parámetros deben cumplir la restricción de martingala en [3] bajo esta nueva densidad y que puede verse en Bahra (1997).

3. Datos

Los cuatro modelos de valoración expuestos anteriormente se aplicarán a continuación para valorar opciones americanas sobre activos individuales. Esto puede resultar contradic-

torio en un principio pues la sección anterior está desarrollada para opciones europeas pero como explicaremos a continuación, veremos que es totalmente compatible para la valoración de las opciones americanas que componen nuestra base de datos.

La base de datos está constituida por todas las opciones de compra sobre acciones individuales negociadas diariamente en MEFF desde el día 19 hasta el 30 de enero de 2004. Se trata de opciones americanas que vencen el tercer viernes del mes especificado en el contrato. Sin embargo, se ha seleccionado únicamente el vencimiento más próximo, en nuestro caso el 19 de marzo de 2004⁵. Por tanto, las opciones seleccionadas tienen entre 49 y 60 días para el vencimiento.

Es importante señalar que salvo BSCH, que ha sido eliminado de la base, ninguno de los 20 activos subyacentes sobre los que se negocian contratos de opciones en MEFF repartieron dividendos durante el periodo que va desde el 19 de enero hasta el 19 de marzo de 2004. Esto significa que para los 19 activos subyacentes restantes las opciones americanas pueden considerarse como europeas. Por tanto, las fórmulas de opciones europeas serán aplicables para valorar las opciones de compra americanas descritas anteriormente.

Como es usual en este tipo de trabajos, se han eliminado las opciones que violan la siguiente banda de arbitraje:

$$C_t \geq \max (0, S_t - Ke^{-r\tau})$$

La muestra resultante está formada por 1953 precios de cruce, correspondientes a 19 activos subyacentes durante 10 días de negociación. Además, la muestra se ha dividido en las tres categorías según el grado de *moneyness*: opciones *in-the-money* (ITM), cuando $K/S \leq 0,985$, opciones *at-the-money* (ATM), cuando $K/S \in (0,985, 1,015)$, y opciones *out-of-the money* (OTM), cuando $K/S \geq 1,015$. Las principales características de la base de datos se recogen en la Tabla 1.

Por último, como aproximación al tipo de interés libre de riesgo se han utilizado los tipos de interés diarios para operaciones a menos de noventa días que utiliza MEFF.

⁵ En la actualidad en MEFF se negocian opciones sobre 20 acciones individuales: Abertis, Acerinox, Altadis, Amadeus, Banco Popular, Bankinter, BBVA, Endesa, Gas Natural, Iberdrola, Inditex, Indra, Repsol YPF, BSCH, Sogecable, Telefónica, Telefónica Móviles, Terra, TPI y Unión Fenosa.

TABLA 1
ESTADÍSTICOS DESCRIPTIVOS

	Todas		ITM <i>Calls</i>		ATM <i>Calls</i>		OTM <i>Calls</i>	
SUBY.	N.º obs.	Prima media	N.º obs.	Prima media	N.º obs.	Prima media	N.º obs.	Prima media
ACE	27	0.7522	17	1.0918	3	0.2200	7	0.1557
ACX	85	0.8873	9	1.8400	23	1.3326	53	0.5323
ALT	85	1.1508	53	1.6136	7	0.6586	25	0.3076
AMS	205	0.3861	85	0.6351	44	0.3191	76	0.1466
BBV	63	0.5357	19	1.0389	26	0.4100	18	0.1861
BKT	77	1.2543	32	2.2338	15	0.9233	30	0.3750
CTG	64	1.4656	45	1.8864	14	0.5414	5	0.2660
ELE	102	0.8547	40	1.6488	30	0.5047	32	0.1903
IBE	23	0.3835	8	0.7600	4	0.4075	11	0.1009
IDR	53	0.6302	26	1.0015	5	0.4620	22	0.2295
ITX	210	0.5407	54	1.1657	35	0.6546	121	0.2288
POP	112	1.4467	33	2.8118	37	1.2886	42	0.5133
REP	126	0.6716	53	1.1683	27	0.5033	46	0.1980
SGC	163	1.8928	44	3.3852	33	1.9836	86	1.0944
TEF	288	0.9222	141	1.5577	54	0.4815	93	0.2147
TEM	91	0.6258	48	0.9948	14	0.3364	29	0.1548
TPI	65	0.1894	16	0.3500	15	0.2113	34	0.1041
TRR	35	0.1217	0	N.D.	9	0.2167	26	0.0888
UNF	79	0.9194	40	1.4603	19	0.5047	20	0.2315

NOTAS:

En la Tabla se recoge el número de contratos de opciones de compra y la prima media para cada uno de los 19 activos subyacentes sobre los que se negocian opciones americanas sobre activos individuales en MEFF, salvo BSCH.

El periodo de estudio comprende desde el día 19 hasta el 30 de enero de 2004.

Se ha seleccionado únicamente el contrato con la fecha de vencimiento más próxima: 19 de marzo de 2004.

FUENTE: Elaboración propia a partir de datos suministrados por MEFF.

4. Estimación

Para cada día t de la muestra y para cada activo subyacente k , se estiman los parámetros neutrales al riesgo de un determinado modelo minimizando la siguiente suma de errores al cuadrado entre los precios teóricos y los precios de mercado:

$$\hat{\theta}_{t,k} = \arg \min \sum_{i=1}^{n_{t,k}} (C_{i,k}^M - C_{i,k}^T(\hat{\theta}))^2 \quad \text{s.a.} \quad \text{restricción de martingala [3]} \quad [12]$$

donde $\hat{\theta}_{t,k}$ es el vector de parámetros estimados, correspondiente a un determinado modelo teórico, con las $n_{t,k}$ opciones sobre el activo subyacente k negociadas en el día t . $C_{i,k}^M$ y $C_{i,k}^T(\hat{\theta})$ son los precios de mercado y teórico respectivamente de la i -ésima opción sobre el activo subyacente k en el día t ⁶.

Como ya ha sido puesto de manifiesto por varios autores, el problema de minimización en [12] para el caso del modelo basado en la mixtura de dos variables lognormales puede que no sea capaz de encontrar una solución en algún día concreto. Para solucionar este problema, como comentan Andersson y Lomakka (2001) y Prado (2004), se ha impuesto la siguiente restricción sobre los valores de β_j en [11] para las dos distribuciones lognormales:

$$0.25 < \frac{\beta_1}{\beta_2} < 4$$

5. Resultados

En esta sección realizaremos en primer lugar un análisis dentro de la muestra (*in-sample*) y después un análisis fuera de la muestra (*out-of-sample*).

5.1. Análisis dentro de la muestra

Los parámetros implícitos de un determinado modelo correspondientes al día t , $\hat{\theta}_{t,k}$, se utilizarán para valorar las opciones negociadas durante ese mismo día t , con el objetivo de obtener los errores de valoración *in-sample*. Es importante señalar que sólo se han podido valorar las opciones para las que existen al menos tres observaciones con el mismo subyacente, de forma que sea posible estimar los parámetros implícitos mediante los modelos CS*, JR y MLN.

En definitiva, se dispone de cuatro series, una por cada modelo considerado, de 1922 errores de valoración *in-sample*. Se han calculado cuatro medidas del error cometido por cada uno de los modelos considerados:

(a) Mediana de los errores: $ME = \text{med} \{C_i^M - C_i^T\}_{i=1}^n$

(b) Mediana de los errores absolutos: $MEA = \text{med} \{|C_i^M - C_i^T|\}_{i=1}^n$

⁶ El problema de minimización en [12] se ha implementado utilizando el programa GAUSS.

(c) Mediana de los errores relativos absolutos: $ME\text{RA} = \text{med} \left\{ \left| \frac{C_i^M - C_i^T}{C_i^M} \right| \right\}_{i=1}^n$

(d) Raíz de la mediana de los errores cuadráticos: $RMEC = \sqrt{\text{med} \{(C_i^M - C_i^T)^2\}_{i=1}^n}$

donde *med* indica el estadístico mediana, C_i^M y C_i^T son los precios de mercado y teórico respectivamente de la opción *i* y *n* es el número de opciones consideradas en cada categoría *moneyness* o el total. Dada la elevada dispersión que presentan las series de errores, las cuatro medidas han sido definidas en base a la mediana, en lugar de la media.

En la Tabla 2 se presentan las medidas del error definidas anteriormente para cada uno de los cuatro modelos estudiados, tanto si consideramos todas las opciones de forma conjunta como si dividimos la muestra en las tres categorías según el grado en dinero.

Para el conjunto de todas las opciones, comprobamos que CS* es el que mejor se comporta, con las cuatro medidas del error definidas anteriormente, seguido por el modelo JR en segundo lugar, MLN en tercer lugar y BS el último. Podemos concluir que la restricción en los parámetros bajo el modelo JR no se traduce en menores errores de valoración dentro de muestra. Este es un resultado lógico y por tanto esperado al ser más restrictivo JR. Puede ocurrir aunque no se analiza aquí, pero puede verse en Prado (2004), para las opciones sobre el IBEX-35, que al estimar los parámetros bajo CS* algunas estimaciones de *sk* y *eku* se salgan de las bandas que garantizan las propiedades deseables de una función de densidad. Por otra parte, si analizamos el signo del estadístico ME, observamos que todos los modelos tienden a infravalorar las opciones de compra.

Al dividir la muestra por categorías de grado en dinero, el ranking anterior se mantiene en términos generales. El modelo de BS sigue siendo el que peor ajuste proporciona dentro de la muestra y después sería MLN. Todos los modelos tienden a sobrevalorar las opciones OTM y en la mayoría de los casos, tienden a infravalorar las opciones ITM y ATM. Este comportamiento es consecuente con el típico efecto sonrisa de volatilidad, en su versión *sneer*⁷, encontrado comúnmente en los mercados de opciones. En resumen, se concluye que los modelos CS* y JR, si bien lo reducen sustancialmente, no son capaces de eliminar por completo el citado efecto *sneer*.

⁷ El efecto *sneer* se refiere a una sonrisa de volatilidad monótona decreciente. Véase, por ejemplo, PEÑA, RUBIO y SERNA (1999), para una detallada discusión sobre la distinción entre *smile* y *sneer* en el mercado español.

TABLA 2
ERRORES DE VALORACIÓN DENTRO DE LA MUESTRA

	ME	MEA	MERA	RMEC
<i>Todas las opciones Call (1.922 observ.)</i>				
BS	0.001213	0.020217	0.032281	0.020217
CS*	0.000001	0.009019	0.015970	0.009019
JR	0.000093	0.009420	0.016685	0.009420
MLN	0.000874	0.019460	0.031727	0.019460
<i>ITM Calls (753 observ.)</i>				
BS	0.028037	0.030295	0.023360	0.030295
CS*	-0.000214	0.009602	0.008082	0.009602
JR	0.000302	0.010729	0.009373	0.010729
MLN	0.026864	0.028994	0.022432	0.028994
<i>ATM Calls (409 observ.)</i>				
BS	-0.001000	0.012158	0.021542	0.012158
CS*	0.002010	0.009627	0.016963	0.009627
JR	0.001832	0.009627	0.017248	0.009627
MLN	0.000055	0.011848	0.020847	0.011848
<i>OTM Calls (760 observ.)</i>				
BS	-0.016143	0.017963	0.077059	0.017963
CS*	-0.000014	0.008326	0.034633	0.008326
JR	-0.000328	0.008458	0.034751	0.008458
MLN	-0.016143	0.017940	0.079085	0.017940

NOTAS:

En la Tabla se recogen cuatro medidas para el error de valoración dentro de la muestra, utilizando los coeficientes implícitos estimados el día previo mediante cuatro modelos de valoración Black-Scholes (BS), Corrado-Su corregido (CS*), Jondeau-Rockinger (JR) y mixtura de lognormales (MLN).

El periodo de estudio comprende desde el día 19 hasta el 30 de enero de 2004.

Se ha seleccionado únicamente el contrato con la fecha de vencimiento más próxima: 19 de marzo de 2004.

Las cuatro medidas del error son: mediana de los errores (ME), mediana de los errores absolutos (MEA), mediana de los errores relativos absolutos (MERA) y raíz de la mediana de los errores cuadráticos (RMEC) cuyas fórmulas son respectivamente:

$$\begin{aligned}
 ME &= med \{C_i^M - C_i^T\}_{i=1}^n & MEA &= med \{|C_i^M - C_i^T|\}_{i=1}^n \\
 MERA &= med \left\{ \left| \frac{C_i^M - C_i^T}{C_i^M} \right| \right\}_{i=1}^n & RMEC &= \sqrt{med \{(C_i^M - C_i^T)^2\}_{i=1}^n}
 \end{aligned}$$

FUENTE: Elaboración propia a partir de datos suministrados por el Mercado Opcional de Activos Derivados en España (MEFF).

5.2. Análisis fuera de la muestra

Como es lógico suponer, el mejor comportamiento *in-sample* tanto de CS* como JR y en menor medida MLN, pudiera deberse simplemente al efecto del mayor número de parámetros que presentan estos modelos en relación al modelo BS. Para analizar esta posibilidad se realiza el siguiente análisis *out-of-sample*.

Para obtener los errores *out-of-sample*, el vector de parámetros implícitos de un determinado modelo correspondiente al día t , $\theta_{t,k}^{\wedge}$, se utilizará para valorar las opciones negociadas durante el día $t + 1$. Como ocurría en el caso anterior, sólo se han podido valorar las opciones para las que durante el día previo existían al menos tres precios de cruce con el mismo subyacente, de forma que sea posible estimar los parámetros implícitos mediante los modelos CS*, JR y MLN.

De esta forma, se dispone nuevamente de cuatro series de 1678 errores de valoración fuera de muestra. En la Tabla 3 se presentan las cuatro medidas del error consideradas de contenido similar a la Tabla 2. Obviamente, como era de esperar, al comparar los resultados de las Tablas 2 y 3, los errores de valoración fuera de la muestra son sustancialmente mayores que los obtenidos dentro de la misma.

Al considerar todas las opciones en su totalidad, CS* y JR son los modelos que mejor se comportan. Como ocurría dentro de la muestra, el modelo MLN no parece suponer grandes avances en relación a BS. Además, se verifica que para todos los estadísticos que miden la bondad de ajuste, es decir, MEA, MERA y RMEC, el modelo JR mejora los resultados de CS*. Por tanto, podemos concluir que la restricción impuesta en los parámetros bajo el modelo JR no empeora los resultados de valoración fuera de la muestra sino que los mejora. Por último, al igual que en el análisis *in-sample*, todos los modelos propuestos tienden a infravalorar para el total de las opciones como puede apreciarse en el estadístico ME.

Al clasificar las opciones en las tres categorías establecidas para el grado en dinero, se observa en el análisis de la bondad de ajuste lo siguiente: BS proporciona los peores resultados en el caso de opciones ITM, y en menor medida para opciones OTM. Mientras, MLN es ligeramente mejor que BS en la categoría ITM y similar a BS en la categoría OTM (MEA y RMEC son ligeramente mayores en MLN que en BS, pero MERA es inferior en MLN que en BS). Para las opciones ATM, BS es siempre mejor en el ajuste que MLN. Los dos modelos mejores en ajuste son CS* y JR siendo prácticamente similares en ATM, sin embargo en ITM y OTM se cumple que JR es ligeramente superior a CS*. Por último, como ocurría dentro de la muestra, todos los modelos tienden a sobrevalorar las opciones OTM y en la mayoría de los casos, tienden a infravalorar las opciones ITM y ATM. De hecho, el único caso donde se infravalora dentro de estos dos últimos grupos sería sólo en la categoría ATM con el modelo BS en *out-of-sample* frente a ITM con CS* y también ATM con BS en *in-sample*.

La Tabla 4 presenta únicamente los estadísticos ME y MERA para los cuatro modelos fuera de la muestra y para cada uno de los 19 activos subyacentes considerados. Como ya hemos obtenido anteriormente, los modelos CS* y JR son los que proporcionan los mejores resultados, en bondad de ajuste, en la mayoría de los casos. Con respecto a la posible sobrevaloración o infravaloración de los modelos: se infravaloran 7 activos subyacentes para todos los modelos, 5 se sobrevaloran y por último, los 7 restantes no existe consenso pues depende del modelo. Si en estos 7 últimos elegimos ME en función del modelo teórico con mayor ajuste según MERA, podemos concluir que 3 de ellos sobrevaloran y los 4 restantes infravaloran.

TABLA 3
ERRORES DE VALORACIÓN FUERA DE LA MUESTRA

	ME	MEA	MERA	RMEC
<i>Todas las opciones Call (1.678 observ.)</i>				
BS	0.003532	0.024891	0.040579	0.024891
CS*	0.001055	0.019907	0.033093	0.019907
JR	0.001295	0.019473	0.032764	0.019473
MLN	0.003868	0.024873	0.040678	0.024873
<i>ITM Calls (672 observ.)</i>				
BS	0.031315	0.034362	0.026883	0.034362
CS*	0.002946	0.023318	0.018522	0.023318
JR	0.003419	0.022528	0.017708	0.022528
MLN	0.029440	0.033339	0.025995	0.033339
<i>ATM Calls (337 observ.)</i>				
BS	-0.001244	0.016543	0.028726	0.016543
CS*	0.004784	0.019859	0.030815	0.019859
JR	0.004499	0.019835	0.033467	0.019835
MLN	0.001736	0.018114	0.031187	0.018114
<i>OTM Calls (669 observ.)</i>				
BS	-0.016437	0.021798	0.094077	0.021798
CS*	-0.002476	0.017308	0.069211	0.017308
JR	-0.002476	0.017269	0.067141	0.017269
MLN	-0.016964	0.022561	0.091775	0.022561

NOTAS:

En la Tabla se recogen cuatro medidas para el error de valoración fuera de la muestra, utilizando los coeficientes implícitos estimados el día previo mediante cuatro modelos de valoración Black-Scholes (BS), Corrado-Su corregido (CS*), Jondeau-Rockinger (JR) y mixtura de lognormales (MLN).

El periodo de estudio comprende desde el día 19 hasta el 30 de enero de 2004.

Se ha seleccionado únicamente el contrato con la fecha de vencimiento más próxima: 19 de marzo de 2004.

Las opciones se han valorado utilizando los coeficientes estimados del día previo.

Las cuatro medidas del error son: mediana de los errores (ME), mediana de los errores absolutos (MEA), mediana de los errores relativos absolutos (MERA) y raíz de la mediana de los errores cuadráticos (RMEC) cuyas fórmulas son respectivamente:

$$ME = med \{ C_i^M - C_i^T \}_{i=1}^n$$

$$MEA = med \{ |C_i^M - C_i^T| \}_{i=1}^n$$

$$MERA = med \left\{ \left| \frac{C_i^M - C_i^T}{C_i^M} \right| \right\}_{i=1}^n$$

$$RMEC = \sqrt{med \{ (C_i^M - C_i^T)^2 \}_{i=1}^n}$$

TABLA 4
ERRORES DE VALORACIÓN FUERA DE LA MUESTRA

Subyac.	Núm. obs.	Estad.	BS	CS*	JR	MLN
ACE	12	ME	0.0250	0.0076	0.0096	0.0116
		MERA	0.0342	0.0826	0.0365	0.0348
ACX	67	ME	-0.0113	-0.0088	-0.0046	-0.0113
		MERA	0.0297	0.0245	0.0229	0.0297
ALT	54	ME	0.0082	-0.0045	-0.0089	0.0082
		MERA	0.0345	0.0208	0.0234	0.0345
AMS	180	ME	0.0051	0.0024	0.0024	0.0051
		MERA	0.0371	0.0344	0.0344	0.0371
BBV	45	ME	0.0092	0.0049	0.0052	0.0059
		MERA	0.0522	0.0468	0.0469	0.0522
BKT	71	ME	-0.0143	-0.0011	-0.0011	-0.0100
		MERA	0.0377	0.0231	0.0222	0.0330
CTG	50	ME	0.0131	0.0148	0.0119	0.0140
		MERA	0.0195	0.0239	0.0222	0.0195
ELE	90	ME	0.0043	-0.0076	-0.0087	0.0043
		MERA	0.0453	0.0465	0.0448	0.0453
IBE	8	ME	-0.0111	-0.0036	-0.0036	-0.0111
		MERA	0.1731	0.0887	0.0887	0.1731
IDR	47	ME	0.0014	-0.0033	-0.0025	0.0014
		MERA	0.0307	0.0468	0.0315	0.0307
ITX	204	ME	0.0071	0.0098	0.0098	0.0101
		MERA	0.0432	0.0434	0.0434	0.0438
POP	91	ME	-0.0053	0.0079	0.0095	-0.0053
		MERA	0.0626	0.0271	0.0242	0.0626
REP	123	ME	-0.0004	-0.0078	-0.0074	-0.0004
		MERA	0.0451	0.0377	0.0366	0.0451
SCG	148	ME	-0.0236	-0.0374	-0.0379	-0.0294
		MERA	0.0319	0.0287	0.0287	0.0319
TEF	274	ME	0.0095	0.0011	0.0015	0.0095
		MERA	0.0431	0.0222	0.0241	0.0431
TEM	77	ME	0.0142	0.0124	0.0130	0.0142
		MERA	0.0320	0.0387	0.0387	0.0320
TPI	58	ME	-0.0002	0.0035	0.0035	-0.0002
		MERA	0.0601	0.0682	0.0581	0.0601
TRR	6	ME	0.0022	-0.0007	-0.0007	0.0022
		MERA	0.1913	0.0241	0.0241	0.1913
UNF	73	ME	-0.0080	0.0007	0.0014	-0.0080
		MERA	0.0376	0.0263	0.0263	0.0376

NOTAS:

En la Tabla se presentan dos medidas para el error de valoración fuera de la muestra, utilizando coeficientes implícitos estimados el día previo, con cada uno de los cuatro modelos considerados: Black-Scholes (BS), Corrado-Su corregido (CS*), Jondeau-Rockinger (JR) y mixtura de lognormales (MLN), para cada uno de los 19 subyacentes considerados.

La base de datos comprende todas las opciones de compra americanas sobre activos individuales negociadas en MEFF desde el día 19 hasta el 30 de enero de 2004, con vencimiento el 19 de marzo de 2004.

Las dos medidas del error consideradas son: mediana de los errores (ME) y mediana de los errores relativos absolutos (MERA). Las opciones se han valorado utilizando los coeficientes implícitos del día previo.

FUENTE: Elaboración propia a partir de datos suministrados por el Mercado Oficial de Activos Derivados en España (MEFF).

Finalmente, es interesante señalar que estos resultados son, en líneas generales, consecuentes con los obtenidos en estudios previos en distintos mercados. Por ejemplo, en lo que respecta al mercado español, Serna (2004), obtiene que el modelo de CS se comporta significativamente mejor que BS, utilizando opciones sobre el futuro del IBEX-35. Por su parte, Prado (2004), encuentra que los modelos CS*, JR y MLN son buenas alternativas frente a BS para valorar opciones sobre el futuro del IBEX-35 y sobre todo en opciones OTM.

6. Conclusiones

En este artículo se han propuesto diferentes distribuciones para la modelización del activo subyacente en opciones de compra sobre acciones individuales que cotizan en MEFF. Estas opciones aunque sean americanas se comportan en la práctica como europeas en la base de datos seleccionada, pues no hay dividendos para ninguna de las acciones durante la vida de la opciones de compra sobre éstas. Se han utilizado cuatro modelos: el modelo Black-Scholes (1973), el modelo de Corrado-Su (1996a) corregido por Jurczenko, Maillet y Negrea (2002b), el modelo de Jondeau-Rockinger (2001) y la mixtura de dos distribuciones log-normales de Bahra (1997). En todos ellos se ha introducido la restricción de martingala planteada por Longstaff (1995). Se ha realizado en el trabajo un análisis dentro y fuera de la muestra. Las conclusiones que se obtienen son que los modelos de Corrado-Su corregido y Jondeau-Rockinger mejoran frente a Black-Scholes y la mixtura lognormal. Estos dos últimos son similares en cuanto a resultados, aunque siendo ligeramente superior la mixtura.

Por último, se observa también que se tiende a sobrevalorar para las opciones *call* OTM en ambos análisis, dentro y fuera de la muestra, y a infravalorar en la mayoría de los casos en el resto de las opciones *call*.

Referencias bibliográficas

- [1] AIT-SAHALIA, Y. y LO, A. (1998): «Nonparametric Estimation of State-Price Densities Implicit in Financial Prices», *Journal of Finance* 53, 499-548.
- [2] ANDERSSON, M. y LOMAKKA, M. (2001): «Evaluating Implied RNDs by Some New Confidence Interval Estimation Techniques», *Working Paper*, Stockholm School of Economics.
- [3] BACKUS, D.; FORESI, S.; LI, K. y WU, L. (1997): «Accounting for Biases in Black-Scholes», *Working Paper*, Stern School of Business.
- [4] BAHRA, B. (1997): «Implied Risk-Neutral Probability Density Functions from Option Prices: Theory and Application», *Working Paper*, Bank of England.
- [5] BAKSHI, G.; CAO, C. y CHEN, Z. (1997): «Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models», *Journal of Finance* 52, 2003-2049.
- [6] BAKSHI, G.; CAO, C. y CHEN, Z. (2000): «Pricing and Hedging Long-Term Options», *Journal of Econometrics* 94, 277-318.
- [7] BATES, D. (1996a): «Dollar Jump Fears, 1984:1992, Distributional Abnormalities Implicit in Currency Futures Options», *Journal of International Money and Finance* 15, 65-93.

- [8] BATES, D. (1996b): «Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rates Process Implicit in Deutsche Mark Options», *Review of Financial Studies* 9, 69-107.
- [9] BLACK, F. y SCHOLES, M. (1973): «The Pricing of Options and Corporate Liabilities», *Journal of Political Economy* 81, 637-659.
- [10] BROWN, C. y ROBINSON, D. (2002), «Skewness and Kurtosis Implied by Option Prices: a Correction», *Journal of Financial Research* 25, 272-282.
- [11] CORRADO, C. y SU, T. (1996a), «Skewness and Kurtosis in S&P 500 Index Returns Implied by Option Prices», *Journal of Financial Research* 19, 175-192.
- [12] CORRADO, C. y SU, T. (1996b): «S&P 500 Index Option Tests of Jarrow and Rudd's Approximate Option Valuation Formula», *Journal of Futures Markets* 16, 611-629.
- [13] CORRADO, C. y SU, T. (1997a): «Implied Volatility Skews and Stock Index Skewness and Kurtosis Implied by S&P 500 Index Option Prices», *Journal of Derivatives* 4, 8-19.
- [14] CORRADO, C. y SU, T. (1997b): «Implied Volatility Skews and Stock Return Skewness and Kurtosis Implied by Stock Option Prices», *European Journal of Finance* 3, 73-85.
- [15] CORRADO, C. (2001): «Option Pricing Based on the Generalized Lambda Distribution», *Journal of Futures Markets* 21, 213-236.
- [16] FERREIRA, E.; GAGO, M.; LEÓN, A. y RUBIO, G. (2004), «An Empirical Comparison of the Performance of Alternative Option Pricing Models». Manuscrito no publicado.
- [17] GALLANT, A. R. y NYCHKA, D. W. (1987): «Seminonparametric Maximum Likelihood Estimation», *Econometrica* 55, 363-390.
- [18] HESTON, S. (1993): «A Closed-form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options», *Review of Financial Studies* 6, 327-343.
- [19] HULL, J. y WHITE, A. (1987): «The Pricing of Options with Stochastic Volatilities», *Journal of Finance* 42, 281-300.
- [20] JACKWERTH, J. y RUBINSTEIN, M. (1996): «Recovering Probability Distributions from Contemporaneous Security Prices», *Journal of Finance* 51, 1611-1631.
- [21] JARROW, R. y RUDD, A. (1982): «Approximate Option Valuation for Arbitrary Stochastic Processes», *Journal of Financial Econometrics* 10, 347-369.
- [22] JONDEAU, E. y ROCKINGER, M. (2000): «Reading the Smile: The Message Conveyed by Methods which Infer Risk Neutral Density», *Journal of International Money and Finance* 19, 885-915.
- [23] JONDEAU, E. y ROCKINGER, M. (2001): «Gram-Charlier Densities», *Journal of Economic Dynamics & Control* 25, 1457-1483.
- [24] JONDEAU, E. y ROCKINGER, M. (2002): «Entropy Densities with an Application to Autoregressive Conditional Skewness and Kurtosis», *Journal of Econometrics* 106, 116-142.
- [25] JURCZENKO, E.; MAILLET, B. y NEGREA, B. (2002a): «Multi-Moment Option Pricing Models: a General Comparison (Part 1)», *Working Paper*, University of Paris I, Panthéon-Sorbone.
- [26] JURCZENKO, E.; MAILLET, B. y NEGREA, B. (2002b), «Skewness and Kurtosis Implied by Option Prices: a Second Comment», *FMG Discussion Paper*, DP419

- [27] LEÓN, A.; MENCÍA, J. y SENTANA, E. (2004): «Parametric Properties of Semi-Non-parametric Distributions, with Applications to Option Valuation». Manuscrito no publicado.
- [28] LEÓN, A. y PRADO, J. M. (2004): «Distribuciones Alternativas de las Rentabilidades y Valoración de Opciones: una Aplicación al IBEX-35», Trabajo en curso.
- [29] LIM, G.; MARTIN, G. y MARTIN, V. (2000): «Option Pricing with Generalized Distributional Forms», *Working Paper*, University of Melbourne.
- [30] LONGSTAFF, F. (1995): «Option Pricing and the Martingale Restriction», *Review of Financial Studies* 8, 4, 1091-1124.
- [31] MELICK, W. R. y THOMAS, C. P. (1997): «Recovering an Asset's Implied PDF from Option Prices: an Application to Crude Oil during the Gulf Crisis», *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 32, 1, 91-115.
- [32] MERTON, R. (1976): «Option Pricing when the Underlying Stock Returns are Discontinuous», *Journal of Financial Economics* 4, 125-144.
- [33] PEÑA, I.; RUBIO, G. y SERNA, G. (1999): «Why do We Smile? On the Determinants of the Implied Volatility Function», *Journal of Banking and Finance* 23, 1151-1179.
- [34] PRADO, J. M. (2004): «IBEX-35 Option Pricing under Alternative Models», *Tesina CEMFI*.
- [35] RITCHEY, R. J. (1990): «Call Option Valuation for Discrete Normal Mixtures», *Journal of Financial Research*, vol. XIII, n.º 4, 285-296.
- [36] RUBINSTEIN, M. (1994): «Implied Binomial Trees», *Journal of Finance* 49, 771-818.
- [37] SERNA, G. (2004): «El modelo de Corrado y Su en el Mercado de Opciones sobre el Futuro del IBEX-35», *Revista de Economía Aplicada*, n.º 34, 101-125.
- [38] SERNA, G. (2003): «Valoración de Opciones con Sonrisas de Volatilidad: Aplicación al Mercado Español de Opciones sobre el Futuro del Índice IBEX-35», *Revista Española de Financiación y Contabilidad* 31, 1203-1227.
- [39] STUART, A. y ORD, K. (1977), *Kendall's Advanced Theory of Statistics*, volumen 1, London: Griffin.

