

# Especificaciones alternativas de la estructura temporal de volatilidades\*

Eliseo Navarro Arribas  
Universidad de Castilla-La Mancha

Estanislao Silla Sancho  
Universitat de València

## Resumen

*En este trabajo se describe y analiza la estructura temporal de volatilidades instantáneas de los tipos de interés forward correspondientes al mercado español durante el periodo 1999-2002. Este estudio se realiza en el contexto del Modelo de Mercado LIBOR proponiéndose, además, una nueva fórmula para describir la volatilidad instantánea de los tipos de interés forward con parámetros fácilmente interpretables. Junto a este modelo se calibran otros dos alternativos propuestos en la literatura que son utilizados como benchmark para contrastar su validez. Esta contrastación se lleva a cabo a partir de datos del mercado de caps proporcionando resultados satisfactorios para el modelo aquí presentado.*

**Palabras clave:** caps, caplets, modelo de mercado LIBOR, volatilidad instantánea, tipos de interés forward.  
**Clasificación JEL:** E44, E52, G15.

## Abstract

*In this paper we examine the term structure of instantaneous volatilities of forward rates for the Spanish market covering the period 1999-2002. This analysis is undertaken within the LIBOR Market Model framework. A new model with easily understandable parameters is proposed to describe the behaviour of the instantaneous volatility of forward rates. Two other alternatives are calibrated using data from the cap market and used as benchmarks to test the accuracy of the new model.*

**Keywords:** cap, caplet, LIBOR Market Model, instantaneous volatility, forward rates.  
**JEL Classification:** E44, E52, G15.

## 1. Introducción

El Modelo de Mercado LIBOR (LMM)<sup>1</sup> se ha convertido en un modelo estándar para la valoración de activos financieros derivados de los tipos de interés dadas sus claras ventajas sobre otros alternativos de entre las que pueden destacarse dos. En primer lugar, es un modelo que toma como variable de estado tipos de interés *forward* que son directamente observables en el mercado a diferencia de otros modelos que trabajan con variables de estado no observables como el tipo de interés instantáneo o volatilidades de determinados tipos de interés. Además, los tipos de interés *forward* constituyen el subyacente en productos derivados

---

\* Los autores desean agradecer los comentarios recibidos por diferentes colegas en la presentación de versiones preliminares de este trabajo en el *VII Spanish-Italian Meeting on Financial and Actuarial Mathematics* (Cuenca, 2004) y, en especial, a Cristóbal González por su sugerencias y atenta lectura del mismo. Asimismo, Eliseo Navarro agradece la financiación recibida por el Ministerio de Ciencia y Tecnología (DGI) BEC2001-1599, de la Consejería de Ciencia y Tecnología de la Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha PAC2002-001 y el patrocinio de la Generalitat Valenciana CTBPR /2002/45.

<sup>1</sup> Este modelo es también conocido como el modelo de BRACE, GATAREK y MUSIELA (1997), que fueron los autores de uno de los primeros trabajos donde fue introducido de forma rigurosa. También han contribuido de forma importante a su desarrollo MILTERSEN, SANDMANN y SONDERMANN (1997), así como Jamshidian (1997).

tales como *caplets*, *caps* o *floors*. En segundo lugar, el LMM replica perfectamente la valoración mediante la fórmula de Black de opciones sencillas como *caplets*, *caps* o *floors*, fórmula que es la habitualmente utilizada en el mercado para la valoración de estos activos<sup>2</sup>.

A grandes rasgos, el Modelo de Mercado puede resumirse como sigue. Uno de los activos derivados sobre tipos de interés más sencillo es la opción simple sobre un FRA (*Forward Rate Agreement*). Esta opción recibe la denominación de *caplet*. Los flujos de caja que generan a su vencimiento,  $T_i + \tau$ , vienen dados por la siguiente expresión:

$$FC_{T_i+\tau} = NP \cdot [f(T_i, T_i, T_i + \tau) - K]^+ \tau \quad [1]$$

y el valor de los mismos en la fecha de ejercicio de la opción, que denotamos por  $T_i$ , es igual a:

$$VA_{T_i} = NP \cdot [f(T_i, T_i, T_i + \tau) - K]^+ \cdot \tau \cdot P(T_i, T_i + \tau) \quad [2]$$

donde NP representa el principal notional del FRA;  $K$  es el tipo de interés de ejercicio o *strike* de la opción y  $f(t, T_i, T_i + \tau)$  es el valor en  $t$  del tipo de interés *forward* correspondiente a un plazo  $[T_i; T_i + \tau]$  ( $t \leq T_i$ ). Nótese que en  $t = T_i$ , el tipo *forward* coincide con el tipo de interés al contado de plazo  $\tau$ ,  $r(T_i, T_i + \tau)$ , es decir,  $f(T_i, T_i, T_i + \tau) = r(T_i, T_i + \tau)$ ; por último,  $P(t, T_i + \tau)$  denota el precio en  $t$  de un bono cupón cero unitario y vencimiento en  $T_i + \tau$ .

A partir de [1], el flujo de caja generado por este activo puede descomponerse en dos partes:

$$FC_{T_i+\tau} = [NP \cdot f(T_i, T_i, T_i + \tau) \cdot \tau - NP \cdot \tau \cdot K]^+ \quad [3]$$

El primer término recibe la denominación de parte flotante o *floating leg* y el segundo parte fija o *fixed leg*.

Para valorar un *caplet* en  $t < T_i$ , tendremos en consideración el hecho de que  $f(t, T_i, T_i + \tau)$  puede replicarse a partir de una cartera de activos negociables en el mercado tal y como se muestra a continuación.

Sea  $\pi(t)$  una cartera compuesta en  $t$  por una posición larga y otra corta en dos bonos cupón cero, ambos de nominal NP. El bono en el que tenemos la posición larga es amortizable en  $T_i$  mientras que el bono en el que tenemos la posición corta es amortizable en  $T_i + \tau$ . El valor de esta cartera viene dado por:

$$\pi(t) = NP \cdot [P(t, T_i) - P(t, T_i + \tau)] \quad [4]$$

Obsérvese que en  $T_i + \tau$ , esta cartera tiene el mismo valor que la parte flotante del *caplet*, es decir,

$$\pi(T_i + \tau) = NP \cdot [(1 + r(T_i, T_i + \tau)\tau) - 1] = NP \cdot f(T_i, T_i, T_i + \tau) \cdot \tau \quad [5]$$

<sup>2</sup> Más aún, estos activos financieros cotizan no por precios sino mediante la volatilidad de la fórmula de Black a partir de la cual se obtiene el precio a pagar por estos productos.

Recurriendo a la hipótesis de inexistencia de oportunidades de arbitraje se ha de verificar que<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned}
 P(t, T_i) - P(t, T_i + \tau) &= f(t, T_i, T_i + \tau) \cdot \tau \cdot P(t, T_i + \tau) \Rightarrow \\
 \Rightarrow f(t, T_i, T_i + \tau) \cdot P(t, T_i + \tau) &= \frac{P(t, T_i) - P(t, T_i + \tau)}{\tau} \tag{6}
 \end{aligned}$$

Llegado este punto, cabe señalar que el Modelo de Mercado, de cara a la valoración de *caplets*, supone que  $f(t, T_i, T_i + \tau)$  sigue un proceso estocástico lognormal, por lo que bajo la medida de probabilidad *forward*<sup>4</sup>,  $Q^i$ , la «cartera»  $f(t, T_i, T_i + \tau) \cdot P(t, T_i + \tau)$  descontada por el numerario  $P(t, T_i + \tau)$ , es decir,  $f(t, T_i, T_i + \tau)$ , que es precisamente el tipo de interés *forward* con vencimiento en  $T_i$ , debe seguir una martingala. Por tanto, el proceso estocástico seguido por el tipo *forward* no debe presentar deriva, luego:

$$\frac{df(t, T_i, T_i + \tau)}{f(t, T_i, T_i + \tau)} = \sigma(t, T_i, \gamma)d\omega_t \tag{7}$$

donde  $\omega_t$  es un proceso de Wiener estándar.

La volatilidad  $\sigma(t, T_i; \gamma)$  está representada en su forma más general, es decir, como una función de la fecha de calendario  $t$ , la fecha de ejercicio del *forward*,  $T_i$ , y un vector de parámetros  $\gamma$ . Si por  $G(\cdot)$  representamos la función de distribución Gaussiana, la condición de no arbitraje implica que la expectativa en  $t$  del tipo de interés *forward* vigente en  $T_i$ , es igual a  $f(t, T_i, T_i + \tau)$  y, por lo tanto, la distribución condicional del tipo *forward* viene dada por:

$$\ln(f(T_i, T_i, T_i + \tau)) \sim G \left( \ln(f(t, T_i, T_i)) - \frac{1}{2} \sigma_{i,Black}^2 T_i; \sigma_{i,Black}^2 T_i \right) \tag{8}$$

donde:

$$\sigma_{i,Black}^2 T_i = \int_t^{T_i} \sigma^2(u, T_i; \gamma) du \tag{9}$$

Integrando los flujos de caja generados por el *caplet* con fecha de ejercicio en  $T_i$  sobre la distribución lognormal anterior, se obtiene la fórmula de valoración de Black para este tipo de activos financieros que es la habitualmente utilizada en el mercado:

$$\text{Caplet}(t, T_i, \tau, NP, \sigma_{i,Black}) = NP[f(t, T_i, T_i + \tau)N(h_1) - K \cdot N(h_2)]P(t, T_i + \tau) \cdot \tau \tag{10}$$

donde:

$$h_1 = \frac{\ln[f(t, T_i, T_i + \tau)/K] + \frac{1}{2} \sigma_{i,Black}^2 (T_i - t)}{\sigma_{i,Black} \sqrt{(T_i - t)}} \tag{11}$$

<sup>3</sup> Téngase en cuenta que  $(1 + r(T_i, T_i + \tau) \cdot \tau) = \frac{P(t, T_i)}{P(t, T_i + \tau)}$ .

<sup>4</sup> Se denomina medida de probabilidad *forward* a aquella medida en la que descontado por el numerario  $P(t, T_{i+\tau})$  el precio de los activos financieros en un mercado completo y bajo la hipótesis de ausencia de oportunidades de arbitraje sigue una martingala. Obsérvese que bajo esta medida de probabilidad la cartera  $(1/t) \cdot [P(t, T_i) - P(t, T_i + \tau)]$ , descontada por el numerario  $P(t, T_i + \tau)$  debe seguir una martingala bajo la medida de probabilidad *forward*  $Q^i$ .

$$h_2 = \frac{\ln[f(t, T_i, T_i + \tau)/K] + \frac{1}{2} \sigma_{i,Black}^2 (T_i - t)}{\sigma_{i,Black} \sqrt{(T_i - t)}} \quad [12]$$

Tal y como ya se ha comentado, esta fórmula es la habitualmente asumida por el mercado para la valoración de *caplets*, de forma que éstos cotizan en términos de las volatilidades de Black en lugar de precios. En cualquier caso, existe una relación uno a uno entre estas dos magnitudes en la medida en que el resto de parámetros que componen la fórmula son conocidos.

La fórmula de Black que se deriva del Modelo de Mercado LIBOR utiliza como *input* la volatilidad  $\sigma_{i,Black}^2$  que puede entenderse a la luz de la expresión [9] como una media de la volatilidad instantánea del tipo de interés *forward*  $\sigma(t, T_i; \gamma)$ . En el caso de que deseáramos proceder a valorar (bien sea por métodos numéricos o analíticos) activos derivados de tipos de interés más complejos que los *caplets* con un modelo de comportamiento de los tipos *forward* que sea consistente con los precios de mercado de los *caplets*, sería necesario conocer esta función. Ahora bien, mientras que las volatilidades de Black son directamente observables en el mercado no podemos decir lo mismo de la función  $\sigma(t, T_i; \gamma)$ . Más aún, diferentes especificaciones de esta función son compatibles con los valores observados de las volatilidades de Black. Por ello, el objetivo de este trabajo es contrastar diferentes formas funcionales de  $\sigma(t, T_i; \gamma)$ . Evidentemente, cabría realizar hipótesis sobre el comportamiento de esta función que calibrarían perfectamente el modelo con las volatilidades de Black observadas (por ejemplo, suponer que es una función continua a trozos) pero ello supondría asumir implícitamente hipótesis respecto al comportamiento de  $\sigma(t, T_i; \gamma)$  poco realistas (por ejemplo, suponer que la volatilidad del tipo *forward* con vencimiento en  $T_i$  es constante a lo largo de toda su vida).

Recordemos que existe una clara relación entre las volatilidades instantáneas y la volatilidad de Black cotizada en el mercado, relación que viene recogida por la expresión [9] y que viene a indicar qué ésta es un valor medio de las volatilidades instantáneas. Finalmente, debemos señalar que al conjunto de valores de  $\sigma(t, T_i; \gamma)$  en un instante dado ( $t$  fijo), correspondientes a diferentes vencimientos  $T_i$ , nos referiremos como «estructura temporal de volatilidades instantáneas» o ETV. Así pues, mediante este término, ETV, se indica el conjunto de volatilidades instantáneas, en un determinado momento, de tipos *forward* con diferentes vencimientos.

Tras estas consideraciones, la estructura del presente trabajo es la siguiente. En la sección segunda, se describen varias especificaciones alternativas de la función  $\sigma(t, T_i; \gamma)$ , explicando sus principales características, sus ventajas e inconvenientes y las hipótesis implícitas que cada una de ellas conlleva. En la sección tercera, se contrastan estas especificaciones alternativas a partir de datos del mercado de *caps*, describiendo el procedimiento empleado para deducir a partir de éste los valores de los *caplets* con diferentes vencimientos y, a partir de ahí, el conjunto de volatilidades de Black que serán utilizadas como *input* para calibrar las especificaciones de la función  $\sigma(t, T_i; \gamma)$ . Por último, en la sección cuarta se resumen las principales conclusiones planteando cuestiones para análisis posteriores.

## 2. Especificaciones alternativas de la volatilidad instantánea

Tal y como se ha señalado, se parte de la hipótesis de que los tipos de interés forward siguen un proceso lognormal cuya volatilidad,  $\sigma(t, T_i; \gamma)$ , no tiene por qué ser constante a lo largo del tiempo. En principio, es posible realizar diferentes hipótesis simplificadoras respecto a la forma funcional de  $\sigma(t, T_i; \gamma)$ . Entre otras, tenemos las siguientes:

- $\sigma(t, T_i; \gamma) = \sigma(t; \gamma)$  La volatilidad depende de la fecha de calendario.
- $\sigma(t, T_i; \gamma) = \sigma(T_i; \gamma)$  La volatilidad depende de la fecha de amortización del *forward*.
- $\sigma(t, T_i; \gamma) = \sigma(T_i - t; \gamma)$  La volatilidad depende del plazo hasta el vencimiento del tipo de interés *forward*.

La primera posibilidad es la más simple de todas y ha sido la asumida en los primeros modelos de la literatura, pero no parece razonable pensar que en una fecha determinada la volatilidad del tipo *forward* con un mes hasta el vencimiento reaccione a una innovación de la misma forma e intensidad que, por ejemplo, el tipo *forward* con diez años hasta el vencimiento.

La segunda alternativa supone que los tipos de interés *forward* con distintos vencimientos tienen una volatilidad diferente, una situación que se da habitualmente en los mercados. Sin embargo, esta hipótesis implica que los tipos de interés *forward* con un determinado vencimiento presentan una volatilidad constante a lo largo del tiempo, hipótesis sin lugar a dudas poco realista ya que, entre otras cosas, conforme transcurre el tiempo, el plazo hasta el vencimiento del tipo *forward* se va acortando y, sin embargo, con este modelo seguiríamos suponiendo que su volatilidad sigue siendo la misma.

La tercera propuesta, habitual en la literatura, supone que la volatilidad depende del plazo hasta el vencimiento del tipo *forward*. Esta última alternativa, aunque más razonable que las anteriores no deja, sin embargo, de plantear problemas en la medida en que a veces es imposible replicar con ella la estructura de volatilidades observada en el mercado. Téngase en cuenta que la volatilidad de Black que es la que efectivamente se observa en los mercados, está relacionada con la volatilidad instantánea según la expresión [9] por lo que si suponemos que ésta última depende en exclusiva de  $T_i - t$ , se debe verificar que:

$$\sigma_{i,Black}^2 \cdot (T_i - t) = \int_t^{T_i} [\sigma^2(T_i - u; \gamma) du] \tag{13}$$

Es fácil comprobar que el segundo miembro de la ecuación anterior es una función creciente respecto a  $T_i$  ya que  $\sigma(T_i - t; \gamma)$  es estrictamente positiva. Por tanto, también ha de serlo el producto  $\sigma_{i,Black}^2 \cdot (T_i - t)$ . Sin embargo, debe tenerse en cuenta que última cantidad viene dada por las cotizaciones de mercado y, por tanto, esta propiedad no siempre tiene por qué verificarse en la práctica.

A pesar de este inconveniente, la tercera hipótesis es habitualmente empleada en la literatura. Por ello en textos especializados como Rebonato (2002), se proponen formulaciones más sofisticadas para asegurar una calibración lo más ajustada posible a los precios (es decir, sus volatilidades) de los *caplets* que cotizan en el mercado. Por ejemplo, se señalan, entre otras, las siguientes:

$$\sigma(t, T_i; \gamma) = h(T_i - t) \cdot g(T_i)$$

$$\sigma(t, T_i; \gamma) = h(T_i - t) \cdot g(t)$$

$$\sigma(t, T_i; \gamma) = g(T_i) \cdot h(T_i - t) \cdot f(t)$$

Estas hipótesis alternativas más generales añaden, sin embargo, una enorme complejidad en el análisis por lo que el propio Rebonato (2002) expone un método en tres pasos para ajustar con la mayor precisión los precios de los *caplets* suponiendo homogeneidad temporal en la formulación de la volatilidad instantánea.

Teniendo todo esto en cuenta, nos centraremos, en cualquier caso, en formulaciones paramétricas temporalmente homogéneas que, tal y como se ha señalado, es la hipótesis habitual en la literatura. Estas alternativas son las siguientes:

$$a) \sigma(t, T_i; \gamma) = e^{-\gamma_1(T_i-t)} \cdot \gamma_2$$

$$b) \sigma(t, T_i; \gamma) = [\gamma_1(T_i - t) + \gamma_2]e^{-\gamma_3(T_i-t)} + \gamma_4$$

$$c) \sigma(t, T_i; \gamma) = \gamma_1 e^{[-\gamma^1(T_i-t) - \gamma^3]^2} + \gamma_4 \cdot \gamma_5^{(T_i-t)}$$

Las dos primeras han sido ya contrastadas en trabajo previos pero en mercados y periodos distintos y la tercera es una propuesta alternativa que comentaremos a continuación. La primera está basada en el artículo de Jong, Driessen y Pelsser (2000) y la segunda ha sido ampliamente aplicada en la literatura especializada (Brigo y Mercurio, 2000).

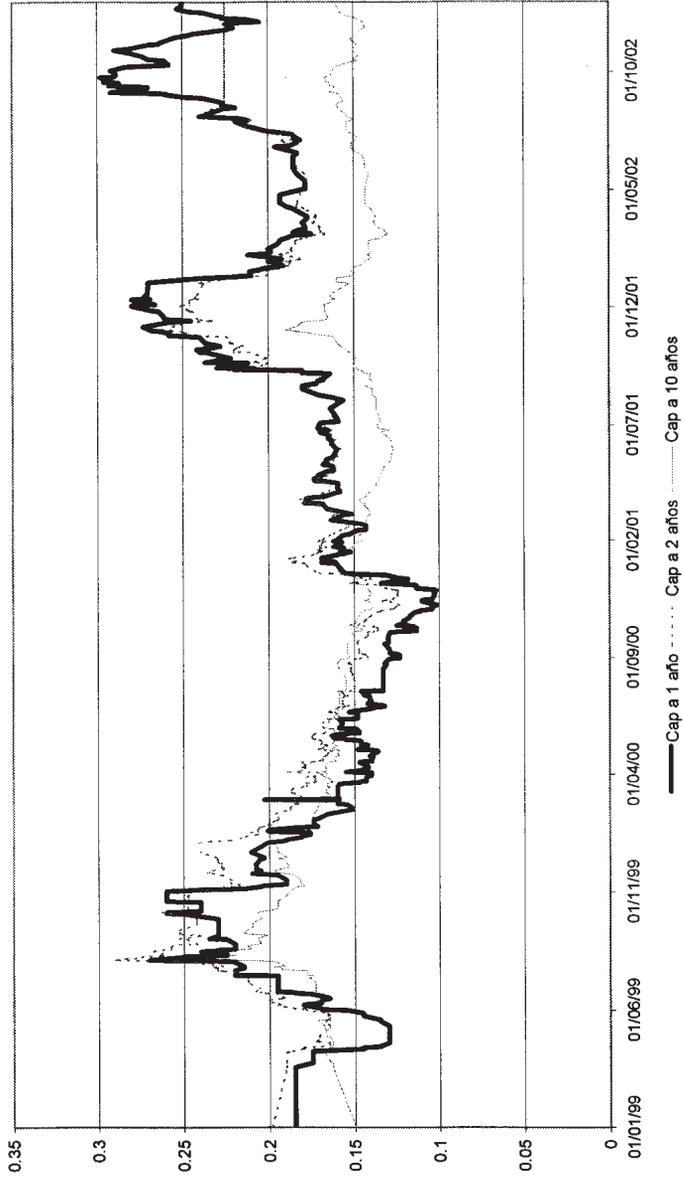
El contraste de la validez de la tercera propuesta es la principal aportación de este trabajo. Esta expresión está inspirada en la fórmula de Heligman y Pollard (1980), ampliamente utilizada en el campo actuarial, siendo su principal ventaja frente a las alternativas anteriores la posible interpretación de sus parámetros. En relación a esta cuestión, obsérvese que el primer término es la parte que permite recoger la posible joroba de la ETV; es una función simétrica respecto a  $T_i - t$  análoga a una función de densidad gaussiana; si  $\gamma_1 > 0$  entonces este primer término toma valores positivos y está relacionado con la profundidad o altura de la joroba, mientras que  $\gamma_2$  depende inversamente de la anchura de la misma;  $\gamma_3$  indica el centro de la joroba y por tanto si  $\gamma_3 > 0$  entonces la ETV presentará joroba, mientras que si  $\gamma_3 < 0$  la función  $\sigma(t, T_i; \gamma)$  sólo recogería la cola derecha de la joroba y la ETV sería decreciente. El segundo término de la expresión c) permite modificar el comportamiento de la ETV en su cola derecha; el parámetro  $\gamma_4$  (que supondremos mayor que cero) supondría un incremento del nivel de las volatilidades mientras que el parámetro  $\gamma_5$  en función de que sea mayor o menor que 1 indicaría el grado de crecimiento o decrecimiento respectivamente de la ETV en su cola derecha. El hecho de que estos parámetros tengan una posible interpretación puede ser especialmente útil de cara a la construcción de modelos explicativos de la ETV en los que quizás puedan identificarse las variables de las que depende la forma y el nivel de ETV en un momento dado.

### 3. Datos y método de estimación de las volatilidades implícitas

El presente trabajo se ha centrado en la estimación diaria de la ETV de acuerdo con cada una de las tres especificaciones señaladas en el apartado anterior correspondientes al mercado español y cubriendo el periodo 1999-2002.

FIGURA 1

EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LAS VOLATILIDADES DE LOS CAPS DURANTE EL PERIODO MUESTRAL 1999-2002



FUENTE: Elaboración propia a partir de datos suministrador por DATASTREAM.

**TABLA 1**  
**VOLATILIDADES *FLAT* CORRESPONDIENTES A *CAPS ATM* DURANTE EL PERIODO MUESTRAL**

Plazo hasta el vencimiento (años)	Cotizaciones (media Bid-Ask) de las volatilidades de Black de los <i>caps</i>					
	01-07-99	01-07-00	01-07-01	01-07-02	Media	Desv. St.
1	0.195	0.142	0.171	0.187	0.174	0.0234
2	0.206	0.157	0.168	0.189	0.180	0.0218
3	0.214	0.163	0.164	0.187	0.182	0.0240
4	0.200	0.166	0.159	0.180	0.176	0.0181
5	0.198	0.166	0.155	0.173	0.173	0.0182
7	0.193	0.163	0.146	0.162	0.166	0.0196
10	0.173	0.159	0.136	0.151	0.155	0.0155

**NOTAS:**

Como puede observarse la forma de las volatilidades *flat* correspondientes al mercado de *caps* ha variado a lo largo del periodo muestral. En general las dos formas más representativas de las volatilidades *flat* son decreciente y en forma de joroba. Los valores medios son el resultado de combinar ambas figura y, por tanto, no representan el comportamiento que se puede observar de las volatilidades en ninguna fecha concreta. Igualmente se observa que las volatilidades de los *caps* a más corto plazo presenta una mayor variabilidad (medida a través de la desviación típica) que la de los *caps* a largo plazo.

FUENTE: Elaboración propia a partir de datos suministrados por Datastream.

El primer problema con el que nos encontramos de cara a estimar la ETV es la no disponibilidad de cotizaciones de *caplets* con diferentes vencimientos que se negocien simultáneamente en este mercado. Mucho más líquidos, por el contrario, resultan ser los mercados de *caps* y *floors* que pueden interpretarse, de hecho, como carteras de *caplets* con fechas de ejercicio sucesivas<sup>5</sup>. Así, un *cap* a tres años puede interpretarse como una serie de *caplets* concatenados con fechas de ejercicio en  $T_i = 6, 12, 18, 24$  y 30 meses, todos ellos con un plazo o tenor de 6 meses ( $\tau = 6$  meses). Así pues, las fechas de vencimiento de cada uno de los *caplets* coincide con la fecha de ejercicio del *caplet* posterior. El primer paso en este trabajo será estimar los precios de los *caplets* implícitos en los *caps*.

La base de datos empleada ha sido suministrada por Datastream e incluye datos diarios de volatilidades de *caps* desde enero de 1999 hasta diciembre de 2002. Estas volatilidades son los valores medios de las volatilidades de oferta y demanda (*bid-ask*) correspondientes a *caps at-the-money*, siendo el tipo de interés de ejercicio,  $K$ , el tipo de interés de los *swaps* con el mismo vencimiento. Los vencimientos disponibles son 1, 2, 3, 4, 5, 7 y 10 años. Los *caps* a un año tienen un tenor de 3 meses mientras que el resto de *caps* tienen un tenor de 6 meses. Aunque la serie proporcionada por Datastream incluye información diaria, los datos, bien para algún vencimiento o todos ellos, tienden a repetirse con cierta frecuencia conteniendo por tanto información probablemente obsoleta. Para evitar, en parte, este problema se ha trabajado exclusivamente con aquellos días en los que se producían cambios en los datos de los *caps* para, al menos, un vencimiento.

<sup>5</sup> Esta es una diferencia sustancial con los *swaptions* (un contrato de opción sobre un *swap*) ya que los flujos de caja generados por estos activos no son separables aditivamente respecto a los tipos *forward* de los que dependen por lo que es necesario introducir la distribución conjunta de estos tipos *forward* para su valoración y, por tanto, las correlaciones entre los diferentes tipos de interés *forward* tienen que tenerse en cuenta en el proceso de valoración.

Los precios de los *caps* cotizan en términos de la volatilidad de Black  $\sigma_{Black}$ . El precio del *cap* es, como se ha dicho, la suma de los precios de los *caplets* que lo componen, por tanto:

$$cap_n = \sum_{i=1}^n caplet_i(\sigma_{Black}) \quad [14]$$

donde por  $cap_n$  denotamos el valor en  $t$  de un *cap* con  $n \cdot \tau$  años hasta el vencimiento, siendo  $\tau$  el *tenor* del *cap* (expresado en años) y por  $caplet_i$ , el valor en  $t$  de un *caplet* con fecha de ejercicio  $T_i$  y *tenor*  $\tau$ .

Por tanto, la volatilidad de Black que proporciona el precio de un *cap* es aquella que verifica las siguientes igualdades:

$$cap_n(\sigma_{Black}) = \sum_{i=1}^n caplet_i(\sigma_{Black}) \quad [15]$$

Obsérvese que el precio del *cap* se obtiene suponiendo que la volatilidad de los *caplets* que lo componen es constante lo que constituye, en cierto modo, una inconsistencia. Esta volatilidad recibe la denominación de «*flat volatility*» o, en ocasiones, «*forward volatility*». Sin embargo, la volatilidad aplicable a cada uno de los *caplets* individuales,  $\sigma_{i,Black}$ , no es, evidentemente, constante, éstas últimas reciben la denominación de *spot volatilities* o «*forward forward volatilities*».

En la Tabla 1 se han recogido las volatilidades de los *caps* en algunas de las fechas del periodo muestral. En general, puede observarse que durante la primera mitad del periodo se ha producido una disminución generalizada de las volatilidades. Sin embargo, a partir de 2001 las volatilidades de los *caps* con diferentes vencimientos han evolucionado de forma distinta. Así mientras que las volatilidades de los *caps* a corto plazo han aumentado considerablemente, la de los *caps* a largo plazo han permanecido constantes. Eso ha producido un cambio profundo en la forma de la estructura temporal de volatilidades *flat*. De hecho, pueden observarse, en general, dos situaciones: forma de joroba con anterioridad a 2001 y volatilidades *flat* decrecientes desde esa fecha. Sólo durante el año 2000 aparecen volatilidades crecientes con el plazo. Esto mismo puede observarse en la Figura 1 en la que se ha representado la evolución durante el periodo muestral de las volatilidades *flat* de los *caps* correspondientes a los plazos de 1, 2 y 10 años pudiendo observarse cruces entre las dos primeras, indicativo de cambios en la forma de la volatilidad.

En el mundo del Modelo de Mercado LIBOR, la relación entre las volatilidades *spot* de los *caplets* y la volatilidad instantánea, suponiendo homogeneidad temporal, viene dada por la ya expuesta relación [13], es decir:

$$\sigma_{i,Black}^2 \cdot (T_i - t) = \int_t^{T_i} \sigma^2(T_i - u; \gamma) du \quad [16]$$

Para calibrar una determinada especificación de la volatilidad instantánea a los datos de cotizaciones de los *caps* se procede de la siguiente forma. En primer lugar, a partir de las volatilidades de los *caps* obtenemos sus precios mediante la aplicación de la fórmula de Black a sus *caplets* componentes, es decir:

$$cap_n(\sigma_{Black}) = \sum_{i=1}^n caplet_i(\sigma_{Black}) = \sum_{i=1}^n NP[f(t, T_i, T_i + \tau)N(h_1(\sigma_{Black})) - K \cdot N(h_2(\sigma_{Black}))]P(t, T_i + \tau)\tau \quad [17]$$

$$h_1 = \frac{\ln[f(t, T_i, T_i + \tau)/K] + 1/2\sigma_{Black}^2(T_i - t)}{\sigma_{Black}\sqrt{T_i - t}} \quad [18]$$

$$h_2 = \frac{\ln[f(t, T_i, T_i + \tau)/K] + 1/2\sigma_{Black}^2(T_i - t)}{\sigma_{Black}\sqrt{T_i - t}} \quad [19]$$

A partir de los precios de los *caps* ajustamos por mínimos cuadrados cada una de las tres especificaciones de la volatilidad instantánea. Este ajuste lo realizamos sustituyendo en la fórmula anterior las *flat volatilities* por las volatilidades *spot* correspondientes que se derivan de aplicar la expresión [13]. Así pues, la función a optimizar sería:

$$\Gamma(\bar{\gamma}) = \sum_n \left[ cap_n - \sum_{i=1}^{m_n} caplet_i(\sigma(T_i^n - t; \gamma)) \right]^2 \quad [20]$$

donde  $n$  es el número de años hasta el vencimiento de cada uno de los *caps* disponibles<sup>6</sup>,  $m_n$  es el número de *caplets* en los que se descomponen un *cap* con  $n$  años hasta el vencimiento y  $T_i^n$  es la fecha de ejercicio de cada uno de estos *caplets*; por último,  $\gamma$  es el vector de parámetros de la especificación funcional concreta de la volatilidad instantánea.

Este procedimiento se repite para cada uno de los 523 días de los que disponemos de un nuevo conjunto de datos sobre *caps* obteniendo, así, 523 estimaciones de estos parámetros para cada una de las tres especificaciones de la volatilidad instantánea señaladas.

En la muestra disponible, la estructura temporal de volatilidades instantáneas presenta mayoritariamente forma de joroba (especialmente pronunciada hasta 2001) siendo decreciente en el resto de los casos. En la Figura 2 se ha recogido la evolución de las estimaciones, según la especificación (c), de las volatilidades instantáneas correspondientes a *forwards* con diferentes vencimientos. Puede observarse cómo la volatilidad del *forward* con vencimiento a 10 años es claramente inferior al resto, mientras que las volatilidades de los tipos cortos tienden a cruzarse indicando el cambio en la forma de la estructura temporal de volatilidades instantáneas. Puede observarse que tanto al final del periodo como al principio la volatilidad instantánea del tipo *forward* a diez años es muy pequeña. Esto es debido a la gran diferencia entre las volatilidades *flat* a diez años y la correspondiente a plazos más cortos. Téngase en cuenta que la volatilidad del *forward* a diez años es una «media» de las volatilidades de los *forward* a plazos más cortos. Al haber introducido especificaciones homogéneas temporalmente, es decir, en las que la volatilidad depende del plazo hasta el vencimiento del *forward* ( $T_i - t$ ), para que esa media decrezca, la volatilidad instantánea correspondiente a los tipos *forward* a largo plazo tiene que disminuir considerablemente. Es interesante comprobar, en cualquier caso, la evolución de la volatilidad instantánea del tipo *forward* a largo plazo. Éste experimentó una subida hasta finales de 2000 fecha a partir de la cual se inicia un proceso de caída

<sup>6</sup> Recuérdese, tal y como se ha señalado en la descripción de los datos, que los *caps* disponibles tienen vencimientos a 1, 2, 3, 4, 5, 7 y 10 años y los tenor son semestrales excepto para el *cap* a un año en el que es trimestral.

más o menos persistente hasta el final del periodo muestral. Este comportamiento de las volatilidades de los tipos a largo plazo es la que parece estar detrás del cambio en la forma de la estructura temporal de volatilidades *flat* observable en el mercado de *caps*.

A la hora de comparar la bondad del ajuste de cada una de las tres especificaciones señaladas en la sección 2, se ha calculado la suma del valor absoluto de los errores, dato que aparece recogido en la Tabla 2. En la Figura 3 se ha recogido la evolución del error absoluto correspondiente a cada uno de los días de la muestra. En ambos casos queda patente que la especificación (a), la más sencilla de todas ellas, es la que produce peores resultados. Puede observarse que la especificación (a) tiende a mejorar su comportamiento cuando la ETV es decreciente presentando resultados claramente inferiores en caso contrario.

En términos de error absoluto es la especificación (c) la que produce el mejor de los resultados aunque la diferencia con la (b) no es, en principio, muy elevada. En cualquier caso, puede observarse en la siguiente columna de la Tabla 2 que el modelo propuesto en este trabajo produce un mejor ajuste con una frecuencia claramente superior a las otras dos. Así, de cara a contrastar si este mejor ajuste es significativo aplicamos un *test* de signos para lo cual seguimos la propuesta de Diebold y Mariano (1995). De acuerdo con estos dos autores, dadas dos funciones de pérdida (las series de sumas de errores absolutos de cada uno de los ajustes), el *test* propuesto contrasta la hipótesis nula de que la mediana de las diferencias entre los valores de estas dos funciones de pérdida es nula. Bajo condiciones muy poco restrictivas, y suponiendo que la serie de diferencias se distribuye de forma idéntica e independiente, el número de observaciones positivas de estas diferencias en una muestra de tamaño T, debería distribuirse como una binomial de parámetros T y 1/2 bajo la hipótesis nula. El estadístico que proponen es simplemente:

$$S = \sum_{t=1}^T I_+(d_t) \tag{21}$$

donde:

$$I_+(d_t) = \begin{cases} 1 & \text{si } d_t > 0 \\ 0 & \text{si } d_t \leq 0 \end{cases} \tag{22}$$

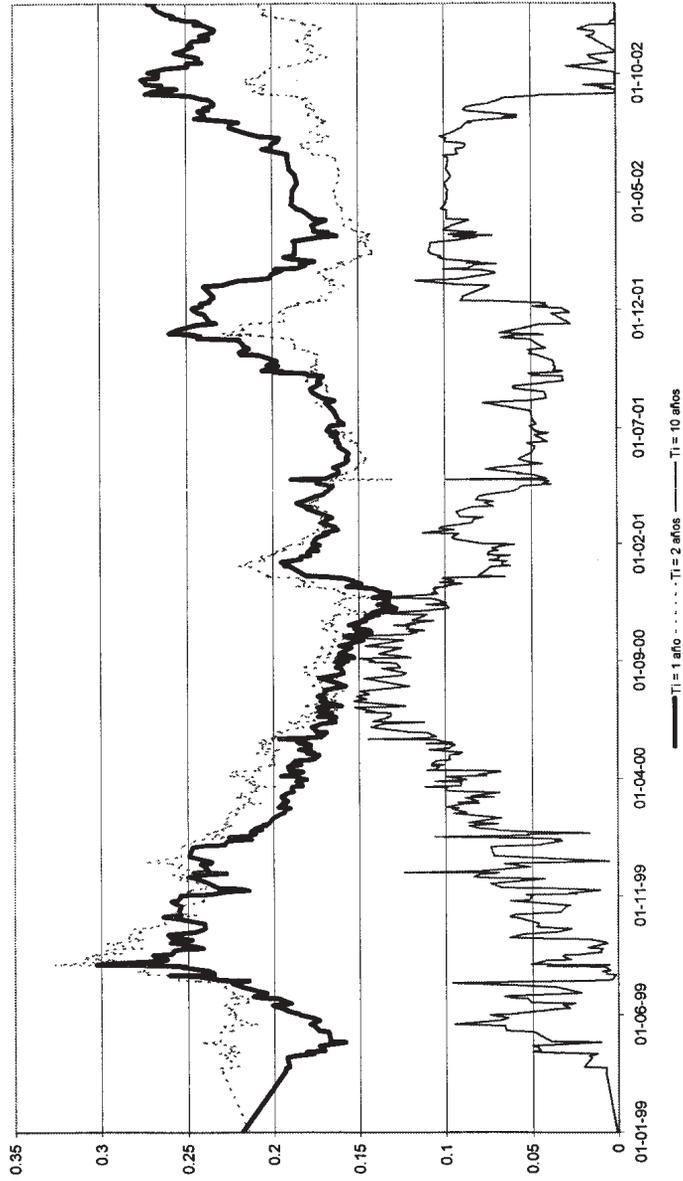
Para muestras lo suficientemente grandes, este estadístico tiende a distribuirse según una normal por lo que:

$$S' = \frac{S - 0,5 \cdot T}{\sqrt{0,25 \cdot T}} \rightarrow N(0, 1) \tag{23}$$

En nuestro caso,  $T = 523$  y de acuerdo con los datos de la Tabla 2 el valor de  $S' = 10,45$ , lo que conduce a rechazar la hipótesis de que los errores absolutos de las especificaciones (b) y (c) se distribuyen de igual forma.

Podemos concluir, pues, que la especificación de la volatilidad instantánea propuesta en este trabajo produce un mejor ajuste a las volatilidades de los *caps* que otras propuestas alternativas habituales en la literatura.

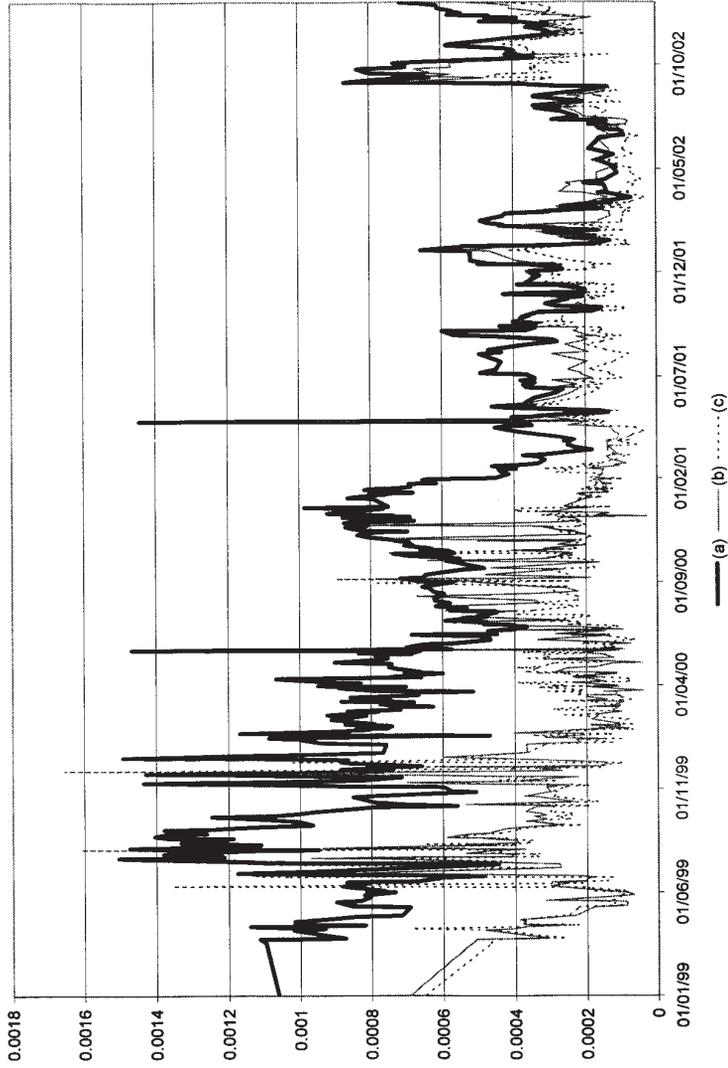
**FIGURA 2**  
**ESTIMACIONES DE LAS VOLATILIDADES INSTANTÁNEAS DE LOS TIPOS**  
**FORWARD A PARTIR DEL MERCADO DE CAPS SEGÚN LA ESPECIFICACIÓN (C)**



FUENTE: Elaboración propia.

FIGURA 3

SUMAS DE LOS ERRORES ABSOLUTOS DE LAS ESTIMACIONES DE LOS PRECIOS DE LOS CAPS A PARTIR DE LAS TRES ESPECIFICACIONES DE LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE VOLATILIDADES INSTANTÁNEAS DE LOS TIPOS FORWARD



NOTA:

Para cada día del periodo muestral se ha recogido la suma de los errores de los precios de los caps con un notional unitario a 1, 2, 3, 4, 5, 7 y 10 años según las especificaciones siguientes para la estructura temporal de volatilidades de los tipos de interés forward:

- (a)  $\sigma(t, T_i; \gamma) = e^{-\gamma(t; T_i - t)} \cdot \gamma_2$
- (b)  $\sigma(t, T_i; \gamma) = [\gamma_1(T_i - t) + \gamma_2]e^{-\gamma_3(T_i - t)} + \gamma_4$
- (c)  $\sigma(t, T_i; \gamma) = \gamma_1 e^{-\gamma_2((T_i - t) - \gamma_3)^2} + \gamma_4 \cdot \gamma_5^{(T_i - t)}$

**TABLA 2**  
**ESPECIFICACIONES ALTERNATIVAS DE LA ESTRUCTURA TEMPORAL**  
**DE VOLATILIDADES INSTANTÁNEAS**

	Suma de los errores absolutos	Días con mejor ajuste
(a) $e^{-\gamma_1(T_i - t)} \cdot \gamma_2$	0,3191	-
(b) $[\gamma_1(T_i - t) + \gamma_2]e^{-\gamma_3(T_i - t)} + \gamma_4$	0,1503	142
(c) $\gamma_1 e^{[-\gamma_2((T_i - t) - \gamma_3)^2]} + \gamma_4 \cdot \gamma_5^{(T_i - t)}$	0,1349	381

**NOTAS:**

Los ajustes de la estructura temporal de volatilidades se han realizado a partir de cotizaciones diarias de *caps* ATM de la zona euro del periodo 1999-2002 proporcionados por Datastream. Sólo se han tenido en cuenta aquellos días en los se renuevan las cotizaciones de los siete *caps* empleados, disponiendo así de observaciones para 523 días. En la segunda columna se recogen la suma de los errores absolutos para todos los *caps* y días utilizados en la muestra ( $7 \times 523$ ) correspondientes a un nominal unitario. En la tercera columna se recoge el número de días que cada una de las especificaciones presenta un menor error absoluto. La especificación (a), al ser un caso particular del (b), no consigue mejorar a las dos especificaciones alternativas en ninguno de los días de la muestra.

FUENTE: Elaboración propia.

#### 4. Conclusiones

En este trabajo se han estimado las volatilidades instantáneas de los tipos de interés *forward* en base a tres fórmulas alternativas para la estructura temporal de volatilidades.

En cualquier caso, se ha podido observar cómo durante el periodo de análisis 1999-2002 éstas volatilidades han variado sustancialmente tanto en su nivel como en su forma. En primer lugar, se ha podido observar un cambio sustancial en la forma de las volatilidades de los *caps*, que ha pasado de tener forma de joroba durante la primera mitad del periodo muestral a forma de creciente durante la segunda mitad. Analizando las volatilidades instantáneas, el cambio en la forma de la estructura temporal de las volatilidades de los *caps* parece inducido fundamentalmente por la fuerte oscilación de la volatilidad instantánea de los tipos *forward* a más largo plazo aunque ello puede estar condicionado por la hipótesis de homogeneidad temporal de las especificaciones funcionales escogidas para describir la estructura temporal de volatilidades instantáneas de los tipos *forward*.

De las tres fórmulas alternativas analizadas, las dos primeras han sido ya utilizadas en la literatura. La tercera es una propuesta alternativa para la ETV con cinco parámetros que presenta la ventaja de que estos parámetros son interpretables en términos de la forma de la ETV y están relacionados con la dimensión, anchura y posición de la posible joroba que frecuentemente presenta la ETV, así como con el crecimiento o decrecimiento de la volatilidad en los plazos más largos. Ello puede facilitar el camino para realizar estudios posteriores que permitan identificar los factores de los que depende la forma de la ETV y profundizar, por tanto, en la naturaleza de las volatilidades de los tipos de interés.

Por otra parte, cabe destacar que la primera propuesta, más sencilla, ajusta de forma bastante deficiente las volatilidades cuando éstas presentan forma de joroba. Las otras dos alternativas presentan, en general, una mejor calidad en el ajuste con resultados relativamente

similares. Ahora bien, la propuesta (c), la nueva alternativa presentada en este trabajo, presenta un mejor ajuste en más de dos tercios de los días que componen la muestra, poniendo de manifiesto una mejora significativa en relación con las alternativas utilizadas como criterio de comparación o *benchmark* en este trabajo.

## 5. Referencias bibliográficas

- [1] BRACE, A.; GATAREK, D. y MUSIELA, M. (1996): «The market model of interest rate dynamics», *Mathematical Finance*, 7, 127-54.
- [2] BRIGO, D. y MERCURIO, F. (2001): *Interest Rate Models. Theory and Practice*, Springer Finance. 49-80.
- [3] DIEBOLD, F. X. y MARIANO, R. S. (1995): «Comparing Predictive Accuracy», *Journal of Business & Economic Statistics*, 13, 3, 134-143.
- [4] HELIGMAN, L. y POLLARD, J. H. (1980): «The age pattern of mortality», *Journal of the Institute of Actuaries*, 107.
- [5] JAMSHIDIAN, F (1997): «LIBOR and swap market model and measures». *Finance and Stochastics*, 1 (4), 293-330.
- [6] DE JONG, F.; DRIESSEN, J. y PELSSER, A. (2000): «LIBOR and Swap Market Models for the Pricing of Interest Rate derivatives: An Empirical Analysis». *Working Paper*, University of Amsterdam.
- [7] MILTERSEN, K.; SANDMANN, K. y SONDERMANN, D. (1997): «Closed-form solutions for term structure derivatives with lognormal interest rates», *Journal of Finance*, 52, 409-30.
- [8] REBONATO, R. (1999): «On the pricing implications of the joint lognormality assumption for the cap and swaption markets», *Journal of computational Finance*, 2 (3), 30-52
- [9] REBONATO, R. (2002): *Modern Pricing of Interest-Rate Derivatives*, Princeton University Press.

