

Valoración de activos derivados de renta fija bajo un modelo con dos factores correlacionados

Manuel Moreno Fuentes*

Departamento de Economía y Empresa
Universitat Pompeu Fabra de Barcelona

Javier Fernández Navas

Departamento de Dirección de Empresas
Universidad Pablo de Olavide de Sevilla

Resumen

Este trabajo presenta un modelo para los tipos de interés en el que el precio de los activos de renta fija depende del tiempo al vencimiento y de dos factores cuya suma es igual al tipo de interés instantáneo. Suponiendo correlación entre ambos factores y aplicando condiciones de no arbitraje, se obtiene una expresión analítica para el precio de bonos. Se analizan posteriormente las implicaciones para la estructura temporal de tipos de interés. Adicionalmente, se obtiene una solución cerrada para el precio de derivados sobre tipos de interés. Esta expresión se utiliza para valorar opciones europeas sobre bonos cupón-cero y se puede aplicar a activos derivados más complejos.

Palabras clave: estructura temporal de tipos de interés, ecuación de valoración de bonos, modelos bifactoriales, procesos Ornstein-Uhlenbeck, derivados sobre tipos de interés.

Clasificación JEL: C51, E43, G13.

Abstract

This paper presents an interest rate model in which prices of fixed income assets depend on time to maturity and two factors whose sum is equal to the instantaneous interest rate. Assuming correlation between both factors and applying no-arbitrage conditions, we find a closed-form expression for bond prices. Implications for the term structure of interest rates are analyzed. We also derive a closed-form solution for interest rate derivatives prices. This expression is applied to price European options on discount bonds and can be applied to more complex derivatives.

Keywords: term structure of interest rates, bond pricing equation, two-factor models, Ornstein-Uhlenbeck processes, interest rate derivatives.

Clasificación JEL: C51, E43, G13.

1. Introducción

Muchos trabajos han propuesto y analizado modelos en tiempo continuo para los tipos de interés. En un primer momento, estos modelos suponían que una única variable de estado, el tipo de interés instantáneo, era suficiente para explicar los movimientos en la curva de rentabilidades. Véanse, por ejemplo, Vasicek (1977), Dothan (1978) y Cox, Ingersoll y Ross (CIR, de aquí en adelante) (1985). Chan *et al.* (1992), realiza una comparación empírica entre algunos de estos modelos.

* Manuel Moreno agradece el apoyo financiero del proyecto de investigación DGESIC BEC2002-00429 y la hospitalidad del IESE donde se realizó parte de este trabajo. Los posibles errores son responsabilidad exclusiva de los autores.
Fecha de esta revisión: marzo de 2005.

Traducción de José Gutiérrez Suñé.

Estos modelos suelen ser muy manejables y proporcionan expresiones analíticas para los precios de ciertos activos derivados. Sin embargo, el supuesto de una única variable de estado implica cambios paralelos en los tipos de interés, un hecho que contrasta con los diferentes movimientos que la curva de rentabilidades suele mostrar empíricamente¹.

Por tanto, los modelos multifactoriales pueden ser adecuados para explicar una mayor variedad de movimientos en la estructura temporal de tipos de interés a lo largo del tiempo. Estos modelos asumen que se necesita más de una variable para explicar los cambios en los tipos de interés. Además del tipo de interés a corto plazo, Richard (1978) y CIR (1985), proponen la tasa de inflación instantánea esperada, Brennan y Schwartz (1979), utilizan el tipo de interés a largo plazo y Longstaff y Schwartz (1992), emplean la volatilidad del tipo de interés a corto plazo. Schaefer y Schwartz (1984), consideran un modelo basado en el tipo de interés perpetuo (la rentabilidad de un bono perpetuo) y la diferencia entre dicho tipo y el tipo a corto plazo (el «diferencial»). Moreno (2003), propone un modelo bifactorial donde los factores son el tipo de interés a largo plazo y el diferencial de tipos de interés a corto y largo plazo.

Finalmente, Chen (1996) y Balduzzi *et al.* (1996), proponen un modelo trifactorial en el cual las variables son el tipo a corto plazo actual, su volatilidad y su tendencia central. Ambos trabajos modelizan las dos primeras variables como procesos de raíz cuadrada (CIR) mientras que la tendencia central se modeliza como un proceso CIR u Ornstein-Uhlenbeck (Vasicek), respectivamente. Ambos modelos son analizados y comparados en Dai y Singleton (2000).

Este trabajo ofrece un modelo bifactorial para el análisis de la estructura temporal de los tipos de interés. En el espíritu de Duffie y Kan (1996), se presenta un modelo afín en el que la suma de dos factores (no especificados) es igual al tipo de interés a corto plazo. Ambos factores siguen procesos (correlacionados entre sí) Ornstein-Uhlenbeck, en los que los tipos de interés convergen a una media a largo plazo. Nuestro modelo generaliza Moreno (2003), que utiliza dos factores no correlacionados.

El presente trabajo está organizado de la siguiente forma. La sección 2 deriva la ecuación de valoración que los precios de los bonos deben verificar. En la sección 3 se resuelve esta ecuación y se obtiene una expresión cerrada para los precios de dichos bonos. Una vez calculados estos precios, la sección 4 analiza las implicaciones sobre las propiedades de la estructura temporal de tipos de interés. La sección 5 proporciona fórmulas analíticas para los precios de activos derivados sobre tipos de interés. Finalmente, la sección 6 resume y presenta las principales conclusiones.

2. La ecuación de valoración de bonos

Suponemos que el precio, en el momento t , de un bono al descuento libre de riesgo que paga 1\$ al vencimiento T sólo depende de los valores actuales de dos variables de estado y del plazo hasta el vencimiento, $\tau = T - t$. La única condición que se impone sobre estos dos factores es que su suma es igual al tipo de interés a corto plazo, denotado por r . Suponemos que la evolución en el tiempo de ambas variables viene dada por el siguiente proceso markoviano:

¹ Es bien conocido que los cambios en la curva de rentabilidades pueden descomponerse en cambios en su nivel, pendiente y curvatura. Véanse, entre otros, LITTERMAN y SCHEINKMAN (1991) y KNEZ, LITTERMAN y SCHEINKMAN (1994).

$$\begin{cases} dx_1 = \beta_1(x_1, x_2) dt + \sigma_1(x_1, x_2) dw_1 \\ dx_2 = \beta_2(x_1, x_2) dt + \sigma_2(x_1, x_2) dw_2 \end{cases} \quad [1]$$

donde t indica tiempo y donde w_1 y w_2 son movimientos brownianos estándares con

$$E[dw_1] = E[dw_2] = 0, \quad dw_1^2 = dw_2^2 = dt \quad \text{y} \quad E[dw_1 dw_2] = \rho dt$$

Para $i = 1, 2$, $\beta_i(\cdot)$ y $\sigma_i(\cdot)$ son la tasa instantánea esperada y la varianza de los cambios en estas dos variables, respectivamente.

Denotamos por $P(x_1, x_2, t, T) \equiv P(x_1, x_2, \tau)$ el precio, en el momento t , de un bono cupón-cero libre de riesgo que paga 1\$ en el momento de su vencimiento $T = t + \tau$. La tasa instantánea de rentabilidad de este bono sigue la ecuación diferencial estocástica

$$\frac{dP(x_1, x_2, \tau)}{P(x_1, x_2, \tau)} = \mu(x_1, x_2, \tau) dt + s_1(x_1, x_2, \tau) dw_1 + s_2(x_1, x_2, \tau) dw_2 \quad [2]$$

donde $\mu(\cdot)$ es la tasa de rentabilidad esperada del bono y $s_i(\cdot)$, $i = 1, 2$ refleja las variaciones en la rentabilidad del bono debidas a los cambios aleatorios en los factores.

Aplicando el lema de Itô y [1], el cambio en el precio del bono viene dado por

$$\begin{aligned} dP(\cdot) &= P_{x_1} dx_1 + P_{x_2} dx_2 + P_t dt + \frac{1}{2} P_{x_1 x_1} (dx_1)^2 + \frac{1}{2} P_{x_2 x_2} (dx_2)^2 + P_{x_1 x_2} dx_1 dx_2 \\ &= \left[P_{x_1} \beta_1(\cdot) + P_{x_2} \beta_2(\cdot) + P_t + \frac{1}{2} \sigma_1^2(\cdot) P_{x_1 x_1} + \frac{1}{2} \sigma_2^2(\cdot) P_{x_2 x_2} + \rho \sigma_1(\cdot) \sigma_2(\cdot) P_{x_1 x_2} \right] dt \\ &\quad + \sigma_1(\cdot) P_{x_1} dw_1 + \sigma_2(\cdot) P_{x_2} dw_2 \end{aligned} \quad [3]$$

donde los subíndices indican derivadas parciales. Comparando [2] y [3], llegamos a

$$\mu(\cdot) = \frac{1}{P} \left[P_{x_1} \beta_1(\cdot) + P_{x_2} \beta_2(\cdot) + P_t + \frac{1}{2} \sigma_1^2(\cdot) P_{x_1 x_1} + \frac{1}{2} \sigma_2^2(\cdot) P_{x_2 x_2} + \rho \sigma_1(\cdot) \sigma_2(\cdot) P_{x_1 x_2} \right] \quad [4]$$

$$s_1(\cdot) = \sigma_1(\cdot) \frac{P_{x_1}}{P}, \quad s_2(\cdot) = \sigma_2(\cdot) \frac{P_{x_2}}{P} \quad [5]$$

Ahora construimos una cartera V que está instantáneamente libre de riesgo. La cartera incluye tres bonos al descuento con vencimientos $T_i = t + \tau_i$ en proporciones z_i , $i = 1, 2, 3$, respectivamente. Por tanto, la tasa de rentabilidad de esta cartera de cobertura viene dada por

$$\begin{aligned} \frac{dV(x_1, x_2, \tau)}{V(x_1, x_2, \tau)} &= \sum_{i=1}^3 z_i \frac{dP(x_1, x_2, \tau_i)}{P(x_1, x_2, \tau_i)} \\ &= \sum_{i=1}^3 z_i \mu(x_1, x_2, \tau_i) dt \\ &\quad + \sum_{i=1}^3 z_i s_1(x_1, x_2, \tau_i) dw_1 + \sum_{i=1}^3 z_i s_2(x_1, x_2, \tau_i) dw_2 \end{aligned}$$

donde hemos aplicado [2].

Bajo condiciones de no arbitraje, la rentabilidad esperada de esta cartera libre de riesgo debe ser el tipo de interés instantáneo sin riesgo:

$$\sum_{i=1}^3 z_i \mu(x_1, x_2, \tau_i) = r$$

Por otra parte, como no hay incertidumbre sobre la rentabilidad de esta cartera, tenemos

$$\sum_{i=1}^3 z_i s_1(x_1, x_2, \tau_i) = \sum_{i=1}^3 z_i s_2(x_1, x_2, \tau_i) = 0$$

Estas expresiones forman un sistema homogéneo de ecuaciones, que tienen una solución no trivial si y sólo si la matriz de coeficientes

$$C = \begin{pmatrix} s_1(x_1, x_2, t, T_1) & s_1(x_1, x_2, t, T_2) & s_1(x_1, x_2, t, T_3) \\ s_2(x_1, x_2, t, T_1) & s_2(x_1, x_2, t, T_2) & s_2(x_1, x_2, t, T_3) \\ \mu(x_1, x_2, t, T_1) - r & \mu(x_1, x_2, t, T_2) - r & \mu(x_1, x_2, t, T_3) - r \end{pmatrix}$$

es singular. Como hemos elegido arbitrariamente el vencimiento de estos bonos, los coeficientes de la combinación lineal que relaciona las filas de esta matriz no dependen del vencimiento. Por tanto, existe un vector $(\lambda_1(x_1, x_2, t), \lambda_2(x_1, x_2, t))$ tal que

$$\mu(x_1, x_2, \tau) - r = \lambda_1(x_1, x_2, t) s_1(x_1, x_2, \tau) + \lambda_2(x_1, x_2, t) s_2(x_1, x_2, \tau) \quad [6]$$

Esta ecuación refleja que la prima instantánea de riesgo es la suma de dos valores relacionados con los cambios aleatorios en ambas variables de estado. Por tanto, los coeficientes de esta combinación lineal, $\lambda_i(\cdot)$, $i = 1, 2$ pueden ser interpretados como los precios de mercado del riesgo relacionados con cada factor. Nótese que esta ecuación es válida para cualquier vencimiento.

Sustituyendo [4] y [5] en [6] y reordenando términos, se obtiene la ecuación de valoración deseada:

$$\left[\frac{1}{2} \sigma_1^2(\cdot) P_{x_1 x_1} + \frac{1}{2} \sigma_2^2(\cdot) P_{x_2 x_2} + \rho \sigma_1 \sigma_2(\cdot) P_{x_1 x_2} \right] + [\beta_1(\cdot) - \lambda_1(\cdot) \sigma_1(\cdot)] P_{x_1} + [\beta_2(\cdot) - \lambda_2(\cdot) \sigma_2(\cdot)] P_{x_2} + P_t - r P = 0 \quad [7]$$

3. Valoración de bonos al descuento

La solución de la ecuación anterior proporciona una expresión cerrada para el precio de bonos al descuento libres de riesgo para todos los vencimientos. La condición terminal viene dada por el pago recibido al vencimiento, $P(x_1, x_2, 0) = 1, \forall x_1, x_2$. Para solucionar esta ecuación, haremos algunos supuestos sobre sus coeficientes, esto es, los precios de mercado del riesgo y los términos incluidos en las dinámicas de los factores, véase [1]. De forma similar a Moreno (2003), establecemos lo siguiente:

Supuesto 1. El precio de mercado del riesgo de cada variable es lineal en dicha variable:

$$\lambda_1(\cdot) = a + bx_1, \quad \lambda_2(\cdot) = c + dx_2 \quad [8]$$

Supuesto 2. Cada variable de estado sigue un proceso Ornstein-Uhlenbeck:

$$\begin{cases} dx_1 = k_1(\mu_1 - x_1) dt + \sigma_1 dw_1 \\ dx_2 = k_2(\mu_2 - x_2) dt + \sigma_2 dw_2 \end{cases} \quad [9]$$

Por tanto, cada variable converge a un valor a largo plazo, μ_i , con velocidad k_i y muestra una varianza constante σ_i . Bajo estos supuestos, podemos reescribir [7] como

$$\frac{1}{2} \sigma_1^2 P_{x_1 x_1} + \rho \sigma_1 \sigma_2 P_{x_1 x_2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 P_{x_2 x_2} + q_1(\hat{\mu}_1 - x_1) P_{x_1} + q_2(\hat{\mu}_2 - x_2) P_{x_2} + P_t - r P = 0 \quad [10]$$

sujeto a la condición terminal

$$P(x_1, x_2, 0) = 1, \quad \forall x_1, x_2 \quad [11]$$

donde

$$\begin{cases} q_1 = k_1 + b \sigma_1 & \hat{\mu}_1 = (k_1 \mu_1 - a \sigma_1) / q_1 \\ q_2 = k_2 + b \sigma_2 & \hat{\mu}_2 = (k_2 \mu_2 - c \sigma_2) / q_2 \end{cases} \quad [12]$$

Solucionando [10], obtenemos la siguiente Proposición.

Proposición 1. El precio en el momento t de un bono al descuento que paga 1\$ en el momento T , $P(x_1, x_2, t, T) \equiv P(x_1, x_2, \tau)$, viene dado por²

$$P(x_1, x_2, \tau) = A(\tau) e^{-B(\tau)x_1 - C(\tau)x_2} \quad [13]$$

donde $\tau = T - t$, y

$$\begin{aligned} A(\tau) &= A_0(\tau) A_1(\tau) A_2(\tau) \\ A_0(\tau) &= \exp \left\{ \rho \frac{\sigma_1 \sigma_2}{q_1 q_2} [H(0, \tau) + H(q_1 + q_2, \tau) - H(q_1, \tau) - H(q_2, \tau)] \right\} \\ A_1(\tau) &= \exp \left\{ -\frac{\sigma_1^2}{4 q_1} B^2(\tau) + x_1^*(B(\tau) - \tau) \right\} \\ A_2(\tau) &= \exp \left\{ -\frac{\sigma_2^2}{4 q_2} C^2(\tau) + x_2^*(C(\tau) - \tau) \right\} \\ B(\tau) &= H(q_1, \tau) \\ C(\tau) &= H(q_2, \tau) \end{aligned} \quad [14]$$

² Nótese que para valorar el bono, necesitamos conocer el valor actual de las dos variables de estado. Si éstos son desconocidos, podrían ser estimados usando técnicas como, por ejemplo, el filtro de Kalman.

con

$$H(x, \tau) = \frac{1 - \exp \{-x \tau\}}{x} \quad [15]$$

y

$$x_i^* = \hat{\mu}_i - \sigma_i^2 / (2q_i^2), \quad i = 1, 2$$

Recuérdese que $q_i, \hat{\mu}_i, i = 1, 2$ han sido definidos en [12].

Demostración. Véase el Apéndice.

Las Tablas 1, 2 y 3 incluyen los valores de estas funciones para valores extremos de sus argumentos³.

Algunos comentarios destacables sobre los resultados incluidos en estas tablas son los siguientes:

- El comportamiento de $A_0(\tau)$ depende crucialmente del signo de ρ .
- Puesto que las funciones $A_i(\tau), i = 1, 2$ son monótonas decrecientes y convergen asintóticamente a cero, el comportamiento de $A(\tau)$ viene dado por el de $A_0(\tau)$.

El siguiente lema resume las principales características de las funciones involucradas en la expresión analítica para el precio del bono dado por esta proposición.

Previamente, definimos las constantes:

$$K_1^* = (x_1^* + x_2^*) \frac{q_1 q_2}{\sigma_1 \sigma_2}$$

$$K_2^* = \exp \left\{ x_1^* \left(\frac{1}{q_1 + q_2} - \frac{1}{q_2} \right) - \frac{\sigma_1^2}{4q_1^3} + x_2^* \left(\frac{1}{q_1 + q_2} - \frac{1}{q_1} \right) - \frac{\sigma_2^2}{4q_2^3} \right\}$$

Lema 1. Para $\tau, q_1 \geq 0$, las funciones $A_i(\tau), i = 0, 1, A(\tau), B(\tau)$, y $H(q_1, \tau)$ verifican las siguientes propiedades⁴:

1. $A_0(\cdot)$ es positiva. Es decreciente y acotada entre 0 y 1 si y sólo si $\rho < 0$ y creciente y mayor que 1 si y sólo si $\rho > 0$.
2. $A_1(\cdot)$ es positiva, decreciente y acotada entre 0 y 1.
3. $A(\cdot)$ es positiva. Es decreciente si y sólo si $\rho \leq K_1^*$. En este caso, es acotada entre 0 (K_2^*) y 1 cuando $\rho < (=) K_1^*$. Es creciente y mayor que 1 si y sólo si $\rho \leq K_1^*$.
4. $B(\cdot)$ es positiva, creciente, acotada entre 0 y $1/q_1$ y acotada por su argumento, el tiempo al vencimiento.
5. $H(q_1, \cdot)$ es positiva, decreciente, convexa y acotada entre 0 y τ .

Demostración. Véase el Apéndice.

³ Nótese que la Tabla 2 no incluye las propiedades de $C(\cdot)$, pues son similares a las de $B(\cdot)$ y son omitidas por brevedad.

⁴ Las propiedades de $A_2(\cdot)$ [$C(\cdot)$] son similares a las de las funciones $A_1(\cdot)$ [$B(\cdot)$] y se omiten por brevedad.

TABLA 1
VALORES EXTREMOS DE LAS FUNCIONES $A_i(\tau)$, $i = 0, 1, 2$, $\tau \geq 0$
Y DE ALGUNAS DE SUS DERIVADAS

Función	Valor en $\tau = 0$	Valor en $\tau = \infty$
$A_0(\tau)$	1	$\begin{cases} 0 & \text{si } \rho < 0 \\ \infty & \text{si } \rho > 0 \end{cases}$
$A'_0(\tau)$	0	$\begin{cases} 0 & \text{si } \rho < 0 \\ \infty & \text{si } \rho > 0 \end{cases}$
$A''_0(\tau)$	0	$\begin{cases} 0 & \text{si } \rho < 0 \\ \infty & \text{si } \rho > 0 \end{cases}$
$A'_0(\tau)/A_0(\tau)$	0	K_0^*
$A''_0(\tau)/A'_0(\tau)$	∞	K_0^*
$A''_0(\tau)/A_0(\tau)$	0	$(K_0^*)^2$
$A_i(\tau)$, $i = 1, 2$	1	0
$A'_i(\tau)$, $i = 1, 2$	0	0
$A''_i(\tau)$, $i = 1, 2$	$-q_i \hat{\mu}_i$, $i = 1, 2$	0
$A'_i(\tau)/A_i(\tau)$, $i = 1, 2$	0	$-x_i^*$, $i = 1, 2$
$A''_i(\tau)/A'_i(\tau)$, $i = 1, 2$	$-\infty$	$-x_i^*$, $i = 1, 2$
$A''_i(\tau)/A_i(\tau)$, $i = 1, 2$	$-q_i \hat{\mu}_i$	$(x_i^*)^2$

NOTAS:

Las funciones $A_i(\tau)$, $i = 0, 1, 2$, $\rho \geq 0$ vienen definidas por

$$A_0(\tau) = \exp \left\{ \rho \frac{\sigma_1 \sigma_2}{q_1 q_2} [H(0, \tau) + H(q_1 + q_2, \tau) - H(q_1, \tau) - H(q_2, \tau)] \right\}$$

$$A_1(\tau) = \exp \left\{ -\frac{\sigma_1^2}{4q_1} B^2(\tau) + x_1^*(B(\tau) - \tau) \right\}$$

$$A_2(\tau) = \exp \left\{ -\frac{\sigma_2^2}{4q_2} C^2(\tau) + x_2^*(C(\tau) - \tau) \right\}$$

con

$$B(\tau) = H(q_1, \tau), \quad C(\tau) = H(q_2, \tau), \quad H(x, \tau) = \frac{1 - \exp\{-x\tau\}}{x}$$

y

$$q_1 = k_1 + b\sigma_1, \quad x_1^* = \hat{\mu}_1 - \sigma_1^2/(2q_1^2), \quad \hat{\mu}_1 = (k_1\mu_1 - a\sigma_1)/q_1$$

$$q_2 = k_2 + d\sigma_2, \quad x_2^* = \hat{\mu}_2 - \sigma_2^2/(2q_2^2), \quad \hat{\mu}_2 = (k_2\mu_2 - c\sigma_2)/q_2$$

$$K_0^* = \rho \frac{\sigma_1 \sigma_2}{q_1 q_2}$$

TABLA 2
VALORES EXTREMOS PARA LAS FUNCIONES $A(\tau)$, $B(\tau)$, $\tau \geq 0$
Y ALGUNAS DE SUS DERIVADAS

Función	Valor en $\tau = 0$	Valor en $\tau = \infty$
$A(\tau)$	1	$\begin{cases} 0 & \text{si } \rho < K_1^* \\ K_2^* & \text{si } \rho = K_1^* \\ \infty & \text{si } \rho > K_1^* \end{cases}$
$A'_0(\tau)$	0	$\begin{cases} 0 & \text{si } \rho < K_1^* \\ \infty & \text{si } \rho > K_1^* \end{cases}$
$A''(\tau)$	$-(q_1 \hat{\mu}_1 + q_2 \hat{\mu}_2)$	$\begin{cases} 0 & \text{si } \rho \leq K_1^* \\ \infty & \text{si } \rho > K_1^* \end{cases}$
$A'(\tau)/A(\tau)$	0	$K_0^* - x_1^* - x_2^*$
$A''(\tau)/A'(\tau)$	$-\infty$	$K_0^* - x_1^* - x_2^*$
$A''(\tau)/A(\tau)$	$-(q_1 \hat{\mu}_1 + q_2 \hat{\mu}_2)$	$(K_0^* - x_1^* - x_2^*)^2$
$B(\tau)$	0	$1/q_1$
$B'(\tau)$	1	0
$B''(\tau)$	$-q_1$	0
$K(\tau) = B(\tau) - \tau$	0	$-\infty$
$l(\tau) = B(\tau)/\tau$	1	0
$m(\tau) = B^2(\tau)/\tau$	0	0

NOTAS:

Las funciones $A(\tau)$, $B(\tau)$, $\tau \geq 0$ vienen definidas por

$$A(\tau) = A_0(\tau) A_1(\tau) A_2(\tau)$$

$$A_0(\tau) = \exp \left\{ \rho \frac{\sigma_1 \sigma_2}{q_1 q_2} [H(0, \tau) + H(q_1 + q_2, \tau) - H(q_1, \tau) - H(q_2, \tau)] \right\}$$

$$A_1(\tau) = \exp \left\{ -\frac{\sigma_1^2}{4q_1} B^2(\tau) + x_1^*(B(\tau) - \tau) \right\}$$

$$A_2(\tau) = \exp \left\{ -\frac{\sigma_2^2}{4q_2} C^2(\tau) + x_2^*(C(\tau) - \tau) \right\}$$

$$B(\tau) = H(q_1, \tau)$$

con

$$H(x, \tau) = \frac{1 - \exp\{-x\tau\}}{x}$$

y

$$q_1 = k_1 + b\sigma_1, \quad x_1^* = \hat{\mu}_1 - \sigma_1^2/(2q_1^2), \quad \hat{\mu}_1 = (k_1\mu_1 - a\sigma_1)/q_1$$

$$q_2 = k_2 + d\sigma_2, \quad x_2^* = \hat{\mu}_2 - \sigma_2^2/(2q_2^2), \quad \hat{\mu}_2 = (k_2\mu_2 - c\sigma_2)/q_2$$

Las constantes K_i^* , $i = 0, 1, 2$, vienen dadas por

$$K_0^* = \rho(\sigma_1\sigma_2/q_1q_2)$$

$$K_1^* = (x_1^* + x_2^*) (q_1q_2/\sigma_1\sigma_2)$$

$$K_2^* = \exp \left\{ x_1^* \left(\frac{1}{q_1 + q_2} - \frac{1}{q_2} \right) - \frac{\sigma_1^2}{4q_1^3} + x_2^* \left(\frac{1}{q_1 + q_2} - \frac{1}{q_1} \right) - \frac{\sigma_2^2}{4q_2^3} \right\}$$

TABLA 3
VALORES EXTREMOS PARA LA FUNCIÓN $H(q_1, \cdot)$, $q_1 \geq 0$

Función	Valor en $q_1 = 0$	Valor en $q_1 = \infty$
$H(q_1, \cdot)$	τ	0
$H'(q_1, \cdot)$	$-\tau^2/2$	0
$H''(q_1, \cdot)$	$\tau^3/3$	0

NOTA:

La función $H(q_1, \cdot)$, $q_1 \geq 0$, se define como

$$H(q_1, \tau) = \frac{1 - \exp\{-q_1 \tau\}}{q_1}$$

con

$$q_1 = k_1 + b\sigma_1$$

Demostración. Véase el Apéndice.

Las Figuras 1, 2 y 3 ilustran gráficamente algunos de los resultados incluidos en este lema.

El precio del bono al descuento, $P(x_1, x_2, \tau)$, es función de los dos factores, x_1, x_2 , y del tiempo al vencimiento, $\tau = T - t$. Este precio depende de los parámetros del proceso Ornstein-Uhlenbeck, la correlación entre ambos factores y los precios del mercado del riesgo. Además, se verifica que

$$P(x_1, x_2, \tau) \Big|_{\rho \neq 0} = A_0(\tau) P(x_1, x_2, \tau) \Big|_{\rho = 0}$$

Obviamente, si $\rho = 0$, el término $A_0(\tau)$ es igual a la unidad y obtenemos los resultados de Moreno (2003).

Utilizando la convexidad de la función $H(q_1, \cdot)$, se verifica que el exponente en $A_0(\tau)$ tiene el mismo signo que ρ . Entonces, tenemos

$$\rho > 0 \Rightarrow P(x_1, x_2, t, T) \Big|_{\rho \neq 0} > P(x_1, x_2, t, T) \Big|_{\rho = 0}$$

$$\rho < 0 \Rightarrow P(x_1, x_2, t, T) \Big|_{\rho \neq 0} < P(x_1, x_2, t, T) \Big|_{\rho = 0}$$

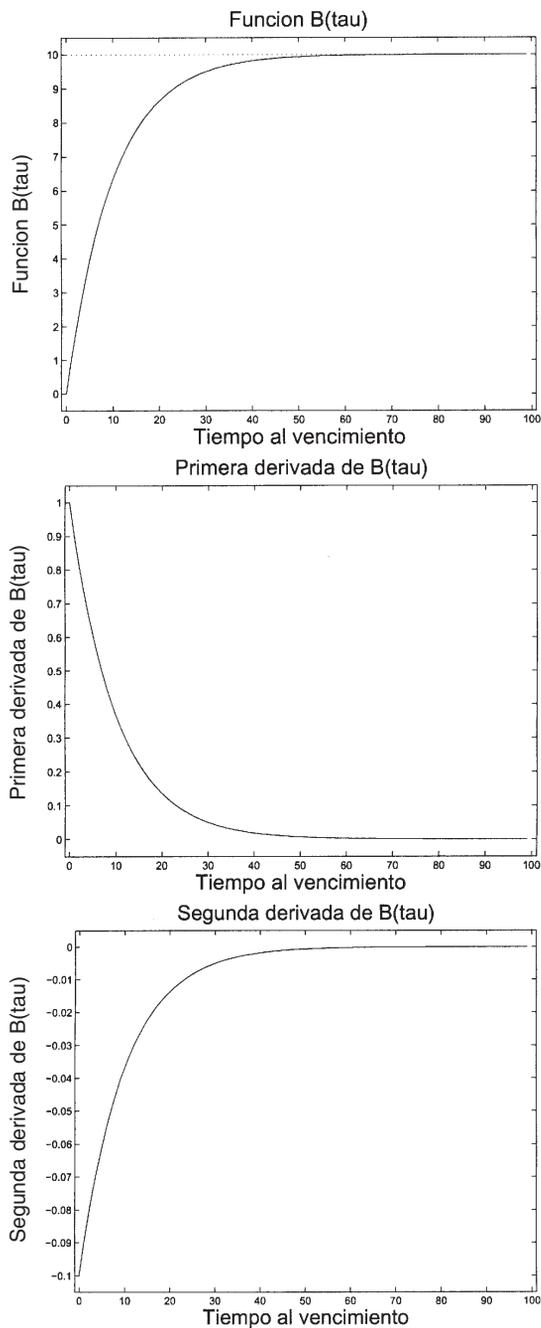
El siguiente lema resume los principales rasgos de la expresión obtenida para el precio del bono.

Lema 2. *La expresión obtenida para el precio del bono satisface las siguientes propiedades:*

1. *Es una función de descuento si y sólo si $\rho \leq K_1^*$.*
2. *Es una función decreciente y convexa en ambas variables de estado.*
3. *Es una función decreciente con el tiempo al vencimiento si $\rho < K_1^*$.*
4. *Converge a cero cuando cualquiera de los factores de los que depende es suficientemente grande.*
5. *Para tiempos al vencimiento suficientemente largos, converge a un valor finito si y sólo si $\rho \leq K_1^*$.*

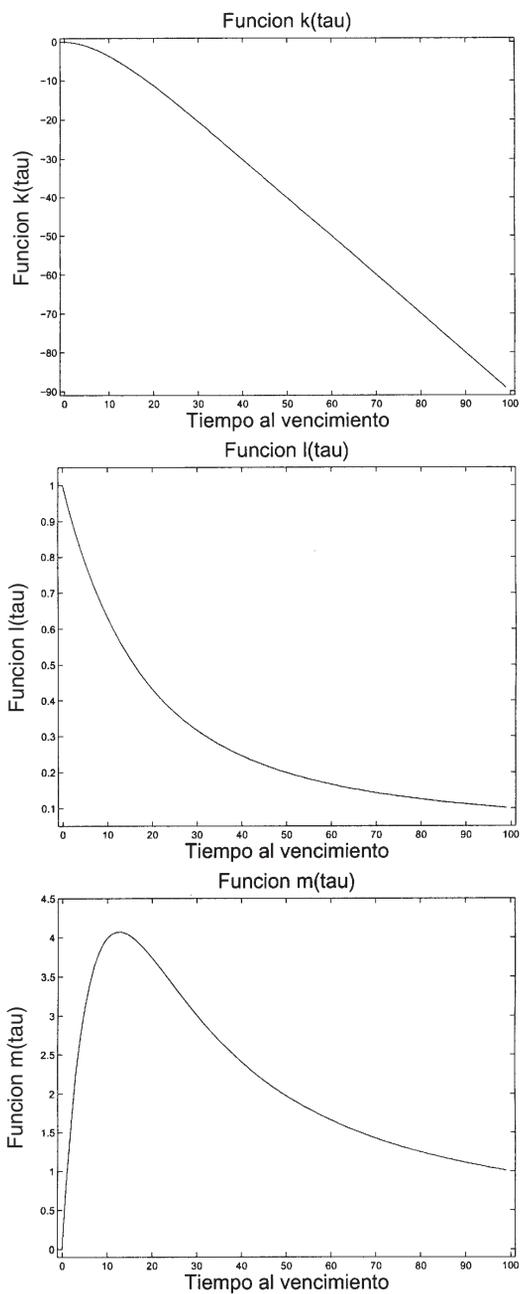
Demostración. Véase el Apéndice.

FIGURA 1
FUNCIÓN $B(\tau)$ Y SUS DERIVADAS



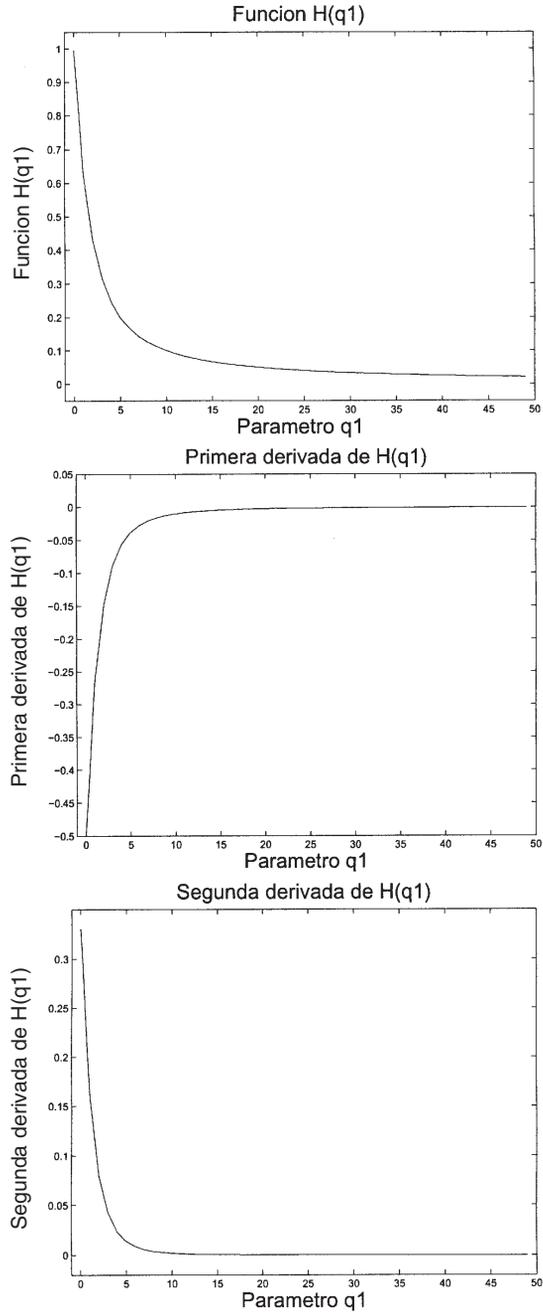
FUENTE: Elaboración propia.

FIGURA 2
FUNCIONES $k(\tau)$, $l(\tau)$ y $m(\tau)$



Los tres gráficos corresponden a las funciones $k(\tau) = B(\tau) - \tau$, $l(\tau) = B(\tau)/\tau$ y $m(\tau) = B^2(\tau)/\tau$.
FUENTE: Elaboración propia.

FIGURA 3
FUNCIÓN $H(q_1)$ Y SUS DERIVADAS



FUENTE: Elaboración propia.

4. Implicaciones sobre la estructura temporal de los tipos de interés

En esta sección, obtenemos la estructura temporal de los tipos de interés y estudiamos algunas de sus propiedades.

El tipo de interés a plazo en el momento t para el momento futuro $T = t + \tau$, denotado por $f(x_1, x_2, t, T) \equiv f(x_1, x_2, \tau)$, viene dado por

$$f(x_1, x_2, \tau) = \frac{P_t}{P} = -\frac{P_\tau}{P} = -\left[\frac{A'_0(\tau)}{A_0(\tau)} + \frac{A'_1(\tau)}{A_1(\tau)} + \frac{A'_2(\tau)}{A_2(\tau)} - B'(\tau) x_1 - C'(\tau) x_2 \right] \quad [16]$$

donde hemos utilizado la proposición 1.

Aplicando las ecuaciones [A.2], [A.3] y [A.4] y reordenando términos, se verifica que

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \tau) &= r(t) - q_1 (x_1 - \hat{\mu}_1) B(\tau) - q_2 (x_2 - \hat{\mu}_2) C(\tau) \\ &\quad - \rho \sigma_1 \sigma_2 B(\tau) C(\tau) - \frac{1}{2} [\sigma_1^2 B^2(\tau) + \sigma_2^2 C^2(\tau)] \end{aligned} \quad [17]$$

Utilizando [16], se obtiene

$$\begin{aligned} f_\tau(x_1, x_2, \tau) &= [q_1(\hat{\mu}_1 - x_1) - \sigma_1^2 B(\tau) - \rho \sigma_1 \sigma_2 C(\tau)] B'(\tau) \\ &\quad + [q_2(\hat{\mu}_2 - x_2) - \sigma_2^2 C(\tau) - \rho \sigma_1 \sigma_2 B(\tau)] C'(\tau) \end{aligned} \quad [18]$$

Por tanto, como reflejan las Figuras 4 y 5, la curva de tipo a plazo puede presentar diferentes formas: creciente, decreciente o no monótona.

Para un valor fijo de x_1 y x_2 , la forma de $Y(x_1, x_2, \tau)$ caracteriza la estructura temporal de los tipos de interés o curva de rentabilidades, en el momento t .

La rentabilidad en el momento t de un bono que vence en el momento $T = t + \tau$, denotada por $Y(x_1, x_2, t, T) \equiv Y(x_1, x_2, \tau)$, es la tasa de rentabilidad compuesta de manera continua relacionada con dicho bono. Esta tasa viene definida implícitamente como

$$P(x_1, x_2, \tau) e^{Y(x_1, x_2, \tau)\tau} = 1$$

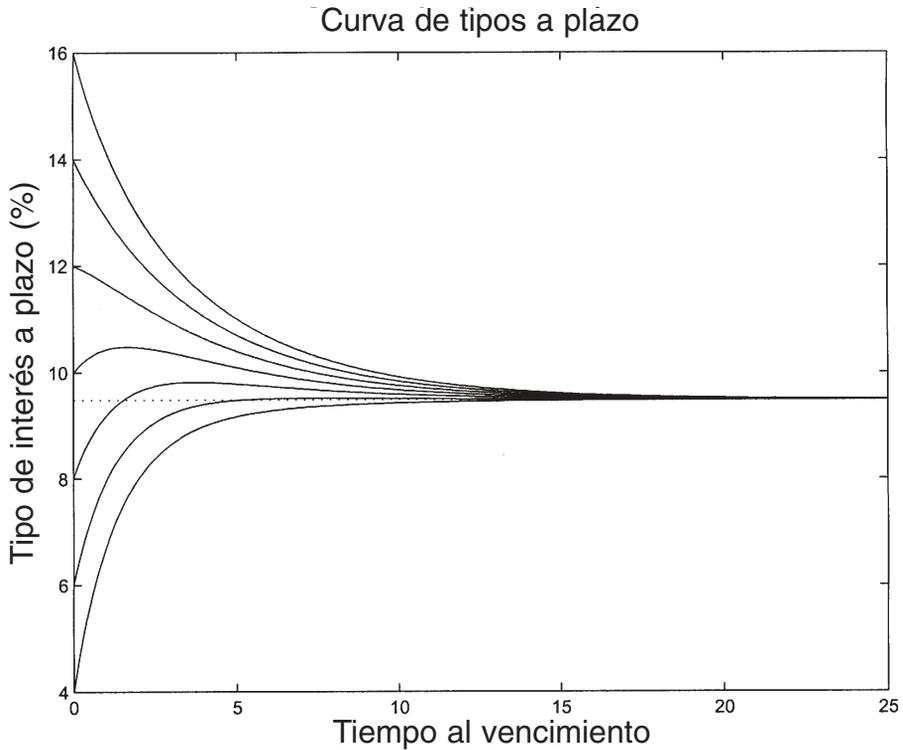
o, equivalentemente

$$Y(x_1, x_2, \tau) = -\frac{1}{\tau} \ln(P(x_1, x_2, \tau)) \quad [19]$$

Este valor, en nuestro modelo, utilizando [13], se convierte en

$$\begin{aligned} Y(\cdot) &= -\frac{\ln(A(\tau))}{\tau} + \frac{B(\tau)}{\tau} x_1 + \frac{C(\tau)}{\tau} x_2 \\ &= \frac{\sigma_1^2}{4q_1} \frac{B^2(\tau)}{\tau} + x_1^* \left[1 - \frac{B(\tau)}{\tau} \right] + \frac{B(\tau)}{\tau} x_1 \\ &\quad + \frac{\sigma_2^2}{4q_2} \frac{C^2(\tau)}{\tau} + x_2^* \left[1 - \frac{C(\tau)}{\tau} \right] + \frac{C(\tau)}{\tau} x_2 \\ &\quad - \rho \frac{\sigma_1 \sigma_1}{q_1 q_2} \frac{H(0, \tau) + H(q_1 + q_2, \tau) - H(q_1, \tau) - H(q_2, \tau)}{\tau} \end{aligned} \quad [20]$$

FIGURA 4
CURVA DE TIPOS DE INTERÉS A PLAZO



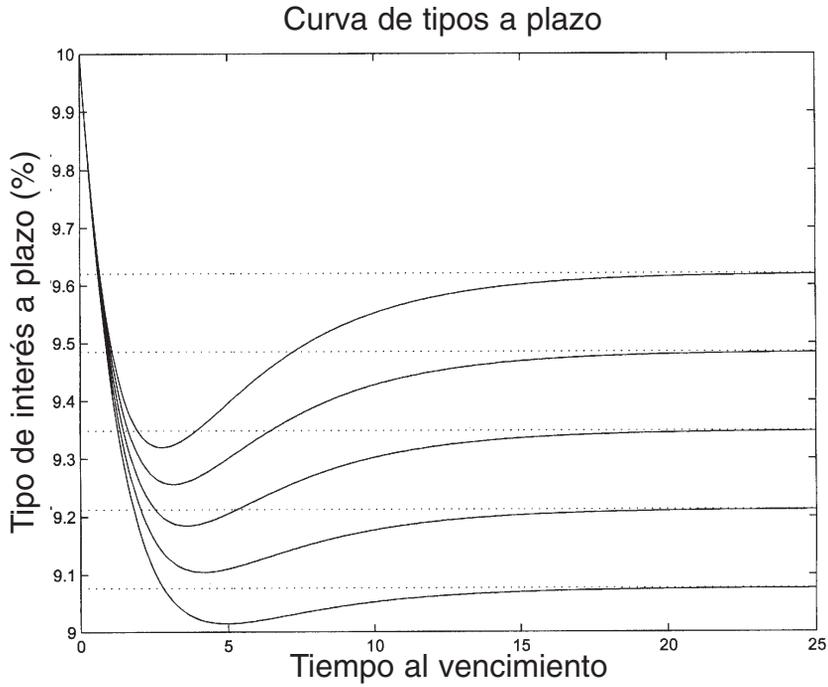
NOTAS:

Los tipos de interés a plazo en el momento t para el momento futuro $T = t + \tau$ vienen dados por

$$f(x_1, x_2, \tau) = r(t) - q_1(x_1 - \hat{\mu}_1)B(\tau) - q_2(x_2 - \hat{\mu}_2)C(\tau) \\ - \rho\sigma_1\sigma_2B(\tau)C(\tau) - \frac{1}{2} [\sigma_1^2B^2(\tau) + \sigma_2^2C^2(\tau)]$$

Los valores de los parámetros son $k_1 = 0,25$, $\mu_1 = 3$, $\sigma_1 = 0,15$, $a = 0,1$, $b = 0,01$, $k_2 = 0,76$, $\mu_2 = 7$, $\sigma_2 = 0,35$, $c = 0,5$, $d = 0,02$. Las distintas curvas corresponden a un valor (porcentual) inicial $r(t) = 4, 6, 8, \dots, 16$ y con correlación entre ambos factores igual a $-0,5$.

FIGURA 5
CURVA DE TIPOS DE INTERÉS A PLAZO



NOTAS:

Los tipos de interés a plazo en el momento t para el momento futuro $T = t + \tau$ vienen dados por

$$f(x_1, x_2, \tau) = r(t) - q_1(x_1 - \hat{\mu}_1)B(\tau) - q_2(x_2 - \hat{\mu}_2)C(\tau) \\ - \rho\sigma_1\sigma_2B(\tau)C(\tau) - \frac{1}{2} [\sigma_1^2B^2(\tau) + \sigma_2^2C^2(\tau)]$$

Los valores de los parámetros son $k_1 = 0,25$, $\mu_1 = 3$, $\sigma_1 = 0,15$, $a = 0,1$, $b = 0,01$, $k_2 = 0,76$, $\mu_2 = 7$, $\sigma_2 = 0,35$, $c = 0,5$, $d = 0,02$. Las distintas curvas corresponden a un valor (porcentual) inicial $r(t) = 10$, y con correlación (de arriba hacia abajo) entre ambos factores igual a -1 , $-0,5$, 0 , $0,5$, 1 .

El siguiente lema resume las principales características de las curvas de tipos a plazo y de rentabilidades.

Lema 3. *Ambas curvas satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *Son función decreciente de ρ .*
2. *Comienzan en el valor actual del tipo al contado, $r(t)$, y, para períodos muy largos, su valor no depende de los valores actuales de ambos factores.*
3. *Son positivas si y sólo si $\rho \leq K_1^*$.*
4. *Dado un cierto vencimiento, son lineales y crecientes en ambas variables de estado.*
5. *Su forma depende de su valor inicial: si $r(t)$ es «suficientemente pequeño», estas curvas crecen con el tiempo al vencimiento. En otros casos, son decrecientes o no monótonas.*

Demostración. Véase el Apéndice.

5. Una fórmula analítica para activos derivados sobre renta fija

La solución de la ecuación de valoración [10], sujeta a las apropiadas condiciones terminales, proporciona una expresión analítica para derivados sobre tipos de interés. Esto es, el precio en el momento t , $U(x_1, x_2, t, T) \equiv U(x_1, x_2, \tau)$, de un activo con pago final $g(x_1(T), x_2(T))$ en el momento T , satisface la ecuación diferencial en derivadas parciales:

$$\frac{1}{2} \sigma_1^2 U_{x_1 x_1} + q_1(\hat{\mu}_1 - x_1) U_{x_1} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 U_{x_2 x_2} + q_2(\hat{\mu}_2 - x_2) U_{x_2} + U_t - rU = 0 \quad [21]$$

sujeta a la condición final

$$U(x_1, x_2, T, T) = g(x_1(T), x_2(T)) \quad [22]$$

Obviamente, si $g(x_1(T), x_2(T)) = 1$, se obtiene la fórmula del precio de un bono al descuento dada en la proposición 1.

Resolviendo [21] con la condición terminal [22] se obtiene la siguiente proposición.

Proposición 2. *Dada la dinámica de tipos de interés especificada en el supuesto 2, el precio en el momento t de un derivado de tipos de interés con pago final $g(x_1(T), x_2(T))$ en el momento T viene dado por*

$$U(x_1, x_2, t, T) = P(x_1, x_2, t, T) E[g(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)] \quad [23]$$

donde

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} m_1(x_1, t, T) - v_{1Y}(t, T) \\ m_2(x_2, t, T) - v_{2Y}(t, T) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1^2(t, T) & v_{12}(t, T) \\ v_{12}(t, T) & v_2^2(t, T) \end{pmatrix} \right) \quad [24]$$

con

$$m_1(x_1, t, u) = e^{-q_1(u-t)}x_1(t) + (1 - e^{-q_1(u-t)})\hat{\mu}_1$$

$$v_{1Y}(t, u) = \frac{\sigma_1^2}{2} H^2(q_1, u - t)$$

$$m_2(x_2, t, u) = e^{-q_2(u-t)}x_2(t) + (1 - e^{-q_2(u-t)})\hat{\mu}_2$$

$$v_{2Y}(t, u) = \frac{\sigma_2^2}{2} H^2(q_2, u - t)$$

$$v_1^2(t, u) = \sigma_1^2 H(2q_1, u - t)$$

$$v_{12}(t, u) = \rho \sigma_1 \sigma_2 H(q_1 + q_2, u - t)$$

$$v_2^2(t, u) = \sigma_2^2 H(2q_2, u - t)$$

donde $P(\cdot)$, $H(\cdot)$, q_1 , q_2 , $\hat{\mu}_1$ y $\hat{\mu}_2$ han sido definidos anteriormente.

Demostración. Véase el Apéndice.

Utilizamos ahora esta proposición para valorar una opción de compra europea sobre un bono cupón-cero. Si esta opción se ejerce al vencimiento, T_c , el comprador paga el precio de ejercicio, K , y recibe un bono al descuento que vence en el momento $T_b > T_c$. El siguiente corolario proporciona la expresión para el precio de esta opción.

Corolario 1. *El precio en el momento t de la opción de compra europea anteriormente mencionada, $C(x_1, x_2, t, T_c; K, T_b)$, viene dado por*

$$C(x_1, x_2, t, T_c; K, T_b) = P(x_1, x_2, t, T_b) \Phi(h + \sigma_{\tilde{P}}) - KP(x_1, x_2, t, T_c) \Phi(h)$$

donde

$$h = \frac{E[\ln(\tilde{P})] - \ln(K)}{\sigma_{\tilde{P}}}, \quad \sigma_{\tilde{P}}^2 = \text{Var}[\ln(\tilde{P})], \quad \tilde{P} = P(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, T_c, T_b)$$

y $P(\cdot)$ es la expresión analítica para el precio del bono dada por la proposición 1, $\Phi(\cdot)$ denota la función de distribución de una variable normal estándar y \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 vienen dados en la proposición 2.

Demostración. Véase el Apéndice.

Los precios de una opción de venta europea se obtienen mediante la paridad *call-put*, esto es,

$$\text{call-put} = P(x_1, x_2, t, T_b) - KP(x_1, x_2, t, T_c)$$

6. Conclusiones

Este trabajo ha ofrecido un modelo bifactorial de la estructura temporal de los tipos de interés. El principal supuesto del modelo es que el precio de un activo derivado sobre tipos de interés es función del tiempo hasta el vencimiento y de dos variables de estado (correlacionadas entre sí) cuya suma es igual al tipo de interés instantáneo.

Suponiendo que ambos factores siguen un proceso conjunto Ornstein-Uhlenbeck, se ha derivado una ecuación de valoración. Para el caso de bonos al descuento, se ha resuelto dicha ecuación, obteniéndose una expresión cerrada que ha permitido analizar la estructura temporal de los tipos de interés que genera.

También se ha desarrollado una expresión analítica para el precio de derivados sobre activos de renta fija y se ha aplicado al caso concreto de opciones europeas sobre bonos al descuento.

APÉNDICE

Demostración de la Proposición 1

Se propone una solución del tipo

$$P(x_1, x_2, t, T) = P(x_1, x_2, \tau) = A(\tau) e^{-B(\tau)x_1 - C(\tau)x_2} \quad [\text{A.1}]$$

donde $\tau = T - t$. Las derivadas parciales vienen, por tanto, dadas por

$$\begin{aligned} P_{x_1}(\cdot) &= -B(\tau) P(\cdot), & P_{x_1 x_1}(\cdot) &= B^2(\tau) P(\cdot) \\ P_{x_2}(\cdot) &= -C(\tau) P(\cdot), & P_{x_2 x_2}(\cdot) &= C^2(\tau) P(\cdot) \\ P_{x_2 x_1}(\cdot) &= B(\tau) C(\tau) P(\cdot) \\ P_t(\cdot) &= -P_\tau(\cdot) = -\left[\frac{A'(\tau)}{A(\tau)} - B'(\tau)x_1 - C'(\tau)x_2 \right] P(\cdot) \end{aligned}$$

Entonces, la ecuación [10] se convierte en

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [\sigma_1^2 B^2(\tau) + \sigma_2^2 C^2(\tau)] + \rho \sigma_1 \sigma_2 B(\tau) C(\tau) + q_1 (x_1 - \hat{\mu}_1) B(\tau) + \\ + q_2 (x_2 - \hat{\mu}_2) C(\tau) - \left[\frac{A'(\tau)}{A(\tau)} - B'(\tau)x_1 - C'(\tau)x_2 \right] - r = 0 \end{aligned}$$

Como esta ecuación es lineal en x_1 y x_2 , debe cumplirse incluso cuando los coeficientes correspondientes son iguales a cero. Por tanto, esta expresión es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\frac{1}{2} [\sigma_1^2 B^2(\tau) + \sigma_2^2 C^2(\tau)] + \rho \sigma_1 \sigma_2 B(\tau) C(\tau) - q_1 \hat{\mu}_1 B(\tau) - q_2 \hat{\mu}_2 C(\tau) = \frac{A'(\tau)}{A(\tau)} \quad [\text{A.2}]$$

$$q_1 B(\tau) + B'(\tau) - 1 = 0 \quad [\text{A.3}]$$

$$q_2 C(\tau) + C'(\tau) - 1 = 0 \quad [\text{A.4}]$$

donde, utilizando [11], las condiciones terminales vienen dadas por

$$A(0) = 1, \quad B(0) = C(0) = 0 \quad [\text{A.5}]$$

En primer lugar, resolvemos [A.3] y [A.4] con las condiciones terminales $B(0) = C(0) = 0$. La solución de ambas ecuaciones es la expresión estándar que aparece en la fórmula de precio del bono bajo el modelo Vasicek unifactorial, esto es,

$$\begin{aligned} B(\tau) &= \frac{1 - \exp\{-q_1 \tau\}}{q_1} = H(q_1, \tau) \\ C(\tau) &= \frac{1 - \exp\{-q_2 \tau\}}{q_2} = H(q_2, \tau) \end{aligned} \quad [\text{A.6}]$$

donde

$$H(x, \tau) = \frac{1 - \exp\{-x \tau\}}{x}$$

Integrando el lado derecho de la ecuación [A.2], se obtiene

$$\begin{aligned} \ln(A(\tau)) = & \frac{1}{2} \sigma_1^2 \int B^2(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \sigma_2^2 \int C^2(\tau) d\tau + \rho \sigma_1 \sigma_2 \int B(\tau) C(\tau) d\tau \\ & - q_1 \hat{\mu}_1 \int B(\tau) d\tau - q_2 \hat{\mu}_2 \int C(\tau) d\tau + K_A \end{aligned} \quad [A.7]$$

Calculamos las integrales incluidas en [A.7]:

$$\int B(\tau) d\tau = \int \frac{1 - \exp\{-q_1 \tau\}}{q_1} d\tau = \frac{1}{q_1} \left[\tau + \frac{1}{q_1} - B(\tau) \right] \quad [A.8]$$

Diferenciando [A.8] se obtiene:

$$\begin{aligned} B(\tau) &= \frac{1}{q_1} [1 - B'(\tau)] \\ \Rightarrow B^2(\tau) &= \frac{1}{q_1} [1 - B'(\tau)] B(\tau) \\ \Rightarrow \int B^2(\tau) d\tau &= \frac{1}{q_1} \left[\int B^2(\tau) d\tau - \frac{B^2(\tau)}{2} \right] \end{aligned}$$

Análogamente, se obtiene

$$\begin{aligned} \int C(\tau) d\tau &= \frac{1}{q_2} \left[\tau + \frac{1}{q_2} - C(\tau) \right] \\ \int C^2(\tau) d\tau &= \frac{1}{q_2} \left[\int C(\tau) d\tau - \frac{C^2(\tau)}{2} \right] \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando [A.6], obtenemos:

$$\int B(\tau) C(\tau) d\tau = \frac{1}{q_1 q_2} \left[\tau + \frac{\exp\{-q_1 \tau\}}{q_1} + \frac{\exp\{-q_2 \tau\}}{q_2} - \frac{\exp\{-(q_1 + q_2) \tau\}}{q_1 + q_2} \right]$$

Sustituyendo estas integrales en [A.7], se obtiene:

$$\ln(A(\tau)) = \frac{1}{2} \frac{\sigma_1^2}{q_1} \left[\frac{1}{q_1} \left(\tau + \frac{1}{q_1} - B(\tau) \right) - \frac{B^2(\tau)}{2} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \frac{\sigma_2^2}{q_2} \left[\frac{1}{q_2} \left(\tau + \frac{1}{q_2} - C(\tau) \right) - \frac{C^2(\tau)}{2} \right] \\
& + \rho \frac{\sigma_1 \sigma_2}{q_1 q_2} \left[\tau + \frac{\exp\{-q_1 \tau\}}{q_1} + \frac{\exp\{-q_2 \tau\}}{q_2} - \frac{\exp\{-(q_1 + q_2)\tau\}}{q_1 + q_2} \right] \\
& - \hat{\mu}_1 \left[\tau + \frac{1}{q_1} - B(\tau) \right] - \hat{\mu}_2 \left[\tau + \frac{1}{q_1} - C(\tau) \right] + K_A
\end{aligned}$$

Aplicando las condiciones terminales dadas por [A.5], conseguimos

$$K_A = -\frac{1}{2} \frac{\sigma_1^2}{q_1^3} - \frac{1}{2} \frac{\sigma_2^2}{q_2^3} - \rho \frac{\sigma_1 \sigma_2}{q_1 q_2} \left[\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_1 + q_2} \right] + \frac{\hat{\mu}_1}{q_1} + \frac{\hat{\mu}_2}{q_2}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\ln(A(\tau)) &= \frac{1}{2} \frac{\sigma_1^2}{q_1} \left[\frac{1}{q_1} (\tau - B(\tau)) - \frac{B^2(\tau)}{2} \right] + \frac{1}{2} \frac{\sigma_2^2}{q_2} \left[\frac{1}{q_2} (\tau - C(\tau)) - \frac{C^2(\tau)}{2} \right] \\
& + \rho \frac{\sigma_1 \sigma_2}{q_1 q_2} \left[\tau - B(\tau) - C(\tau) + \frac{1 - \exp\{-(q_1 + q_2)\tau\}}{q_1 + q_2} \right] \\
& - \hat{\mu}_1 [\tau - B(\tau)] - \hat{\mu}_2 [\tau - C(\tau)]
\end{aligned}$$

Reordenando términos, obtenemos

$$\begin{aligned}
\ln(A(\tau)) &= -\frac{\sigma_1^2}{4q_1} B^2(\tau) + x_1^*(B(\tau) - \tau) - \frac{\sigma_2^2}{4q_2} C^2(\tau) + x_2^*(C(\tau) - \tau) \\
& + \rho \frac{\sigma_1 \sigma_2}{q_1 q_2} [\tau + H(q_1 + q_2, \tau) - H(q_1, \tau) - H(q_2, \tau)] \quad [A.9]
\end{aligned}$$

donde

$$x_i^* = \hat{\mu}_i - \frac{\sigma_i^2}{2q_i^2}, \quad i = 1, 2$$

Por tanto, la expresión final para el precio del bono al descuento se obtiene sustituyendo las expresiones [A.6] y [A.9] en [A.1].

Demostración del Lema 1

Para $\tau, q_1 \geq 0$

1. La función $A_0(\cdot)$ es

a) Positiva puesto que es una función exponencial.

b) Decreciente y acotada entre 0 y 1 si y sólo si $\rho < 0$:

Como $A'_0(\tau) = \rho \sigma_1 \sigma_2 A_2(\tau) B(\tau) C(\tau)$, entonces $A_0(\cdot)$ es una función decreciente si y sólo si $\rho < 0$. Por tanto, está acotada entre $A_0(\infty) = 0$ y $A_0(0) = 1$.

c) Creciente y mayor que 1 si y sólo si $\rho > 0$:

Es consecuencia de $A'_0(\tau) > 0$ si y sólo si $\rho > 0$ y $A_0(0) = 1$.

2. La función $A_1(\cdot)$ es

a) Positiva porque es una función exponencial.

b) Decreciente y acotada entre 0 y 1:

Como

$$\frac{A'_1(\tau)}{A_1(\tau)} = -q_1 B(\tau) \left[x_1^* + \frac{\sigma_1^2 \exp \{-q_1 \tau\}}{2q_1^2} \right] < 0$$

entonces, $A_1(\cdot)$ decrece con τ . Por tanto, está acotada entre $A_1(\infty) = 0$ y $A_1(0) = 1$.

3. La función $A(\cdot)$ es

a) Positiva porque es el producto de funciones exponenciales.

b) Decreciente si y sólo si $r \leq K_1^*$: Claramente, si ρ es negativa, $A(\cdot)$ decrece con τ . Sin embargo, teniendo en cuenta los resultados [1c] y [2b] en este lema, esperamos que $A(\cdot)$ será función decreciente de τ para ciertos valores positivos de ρ pero crecerá con el tiempo al vencimiento para valores suficientes grandes de ρ .

Como

$$A(\infty) = K_2^* \lim_{\tau \rightarrow \infty} \exp \left\{ \left(\rho \frac{\sigma_1 \sigma_2}{q_1 q_2} - x_1^* - x_2^* \right) \tau \right\}$$

se verifica que $A(\cdot)$ converge (para valores grandes de τ) a un valor finito (0 ó K_2^*) si $\rho \leq K_1^*$. En este caso, está acotada entre $A(\infty)$ y $A(0) = 1$. Recíprocamente, crece ilimitadamente si y sólo si $\rho > K_1^*$.

4. La función $B(\cdot)$ es

a) Positiva porque es una función exponencial.

b) Creciente porque $B'(\tau) = \exp \{-q_1 \tau\} > 0$. Entonces, toma valores entre $B(0) = 0$ y $B(\infty) = 1/q_1$.

c) Acotada superiormente por su argumento, el tiempo al vencimiento:

Si definimos $k(\tau) = B(\tau) - \tau$, se obtiene

$$k'(\tau) = B'(\tau) - 1 = -q_1 B(\tau) < 0, \quad k(0) = 0$$

lo cual implica que $k(\cdot)$ es una función con valores negativos.

5. La función $H(q_1, \cdot)$ es

- a) Positiva al ser decreciente (véase el siguiente apartado) y $H(\infty, \tau) = 0$.
 b) Decreciente en q_1 :

$$\frac{\partial H(q_1, \tau)}{\partial q_1} = \frac{\tau q_1 \exp \{-q_1 \tau\} - 1 + \exp \{-q_1 \tau\}}{q_1^2}$$

El numerador es negativo porque es igual a cero cuando $q_1 = 0$ y su derivada, $-\tau^2 q_1 \exp \{-q_1 \tau\}$, es negativa. Por tanto, $H(\cdot)$ es decreciente en q_1 y está acotada entre $H(\infty, \tau) = 0$ y $H(0, \tau) = \tau$.

- c) Convexa en q_1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H(q_1, \tau)}{\partial q_1^2} &= \frac{[(1 + q_1 \tau)^2 + 1]H(q_1, \tau) - [(1 + q_1 \tau) + 1]\tau}{q_1^2} \\ &\geq \frac{[(1 + q_1 \tau)^2 + 1]H(q_1, \tau) - [(1 + q_1 \tau) + 1]H(q_1, \tau)}{q_1^2} \\ &= \frac{1 + q_1 \tau}{q_1} \tau H(q_1, \tau) > 0 \end{aligned}$$

Demostración del Lema 2

1. El precio del bono es una función de descuento si $\rho \leq K_1^*$:
Es consecuencia inmediata al ser una función decreciente en ambos factores (véase la siguiente propiedad) y el hecho de que $P(0, 0, \tau) = A(\tau)$.
2. Es decreciente y convexa en ambos factores:

$$\begin{aligned}
 P_{x_1}(x_1, x_2, \tau) &= -B(\tau)P(x_1, x_2, \tau) < 0 \\
 P_{x_2}(x_1, x_2, \tau) &= -C(\tau)P(x_1, x_2, \tau) < 0 \\
 P_{x_1x_1}(x_1, x_2, \tau) &= B^2(\tau)P(x_1, x_2, \tau) > 0 \\
 P_{x_2x_2}(x_1, x_2, \tau) &= C^2(\tau)P(x_1, x_2, \tau) > 0 \\
 P_{x_1x_2}(x_1, x_2, \tau) &= B(\tau)C(\tau)P(x_1, x_2, \tau) > 0
 \end{aligned}$$

3. Es una función decreciente en el tiempo al vencimiento si $\rho \leq K_1^*$:
Aplicamos [13] y [14] para obtener

$$\frac{P_\tau(x_1, x_2, \tau)}{P(x_1, x_2, \tau)} = \left[\frac{A'(\tau)}{A(\tau)} - B'(\tau)x_1 - C'(\tau)x_2 \right]$$

Aplicando el lema previo, sabemos que $A'(\tau) < 0$ si $\rho \leq K_1^*$ y $B'(\tau) > 0$.

4. Converge a cero cuando cualquiera de los factores de los que depende es suficientemente grande.
este hecho es consecuencia inmediata de la positividad de $B(\cdot)$ y $C(\cdot)$.
5. Para tiempos al vencimiento suficientemente largos, converge si y sólo si $\rho \leq K_1^*$:
Calculando los valores de $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ y $C(\cdot)$ en $\tau = \infty$, se ve fácilmente que

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} P(x_1, x_2, \tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho < K_1^* \\ K_2^* \exp\left\{-\frac{x_1}{q_1} - \frac{x_2}{q_2}\right\} & \text{si } \rho = K_1^* \\ \infty & \text{si } \rho > K_1^* \end{cases}$$

Demostración del Lema 3

Las curvas de tipo a plazo y de rentabilidades cumplen las siguientes propiedades:

1. Son función decreciente de ρ :
 - a) Para el tipo a plazo, es consecuencia directa de [17] y de la positividad de $B(\tau)$ y $C(\tau)$ (propiedad 4 en el lema 1).
 - b) Para las rentabilidades, es consecuencia directa de [20] y de la convexidad de $H(q_1)$ (propiedad 5 en el lema 1).
2. Comienzan en el valor actual del tipo al contado y, para un período muy largo, su valor no depende de los valores actuales de ambos factores:
Utilizando [17] y [20] y los valores extremos para las funciones $B(\tau)$, $l(\tau)$ y $H(q_1, \cdot)$ (véanse tablas 2 y 3) se obtiene que

$$f(x_1, x_2, 0) = Y(x_1, x_2, 0) = r(t), \quad \forall x_1, x_2$$

$$f(x_1, x_2, \infty) = Y(x_1, x_2, \infty) = (x_1^* + x_2^*) \left[1 - \frac{\rho}{A_1^*} \right], \quad \forall x_1, x_2$$

3. Son positivas si y sólo si $\rho \leq K_1^*$:

(\Rightarrow) Si $\rho > K_1^*$, aplicando la propiedad anterior, se obtiene un tipo a plazo (rentabilidad) negativo para un tiempo al vencimiento suficientemente grande.

(\Leftarrow) Es consecuencia de aplicar las propiedades 3 y 4 del lema 1 a [16] y [20].
4. Dado un cierto vencimiento, son lineales y crecientes en ambas variables de estado:
Derivando [16] y [20] y aplicando la propiedad 4 en el lema 1, obtenemos:

$$f_{x_1}(x_1, x_2, \tau) = B'(\tau) > 0, \quad f_{x_2}(x_1, x_2, \tau) = C'(\tau) > 0$$

$$Y_{x_1}(x_1, x_2, \tau) = \frac{B(\tau)}{\tau} > 0, \quad Y_{x_2}(x_1, x_2, \tau) = \frac{C(\tau)}{\tau} > 0$$

5. La forma de estas curvas depende de su valor inicial, $r(t)$:
 - a) Derivando [17] con respecto a τ , se comprueba que la curva de tipos a plazo crece con el tiempo al vencimiento si, para $i = 1, 2$, tenemos:

$$x_i < \hat{\mu}_i - \left(\frac{\sigma_i}{q_i} \right)^2 - \rho \frac{\sigma_i \sigma_{3-i}}{q_i q_{3-i}} \left[1 - \left(1 - \frac{q_{3-i}}{q_i} \right) \left(-\rho \frac{\sigma_{3-i}}{\sigma_i} \right)^{q_{3-i}/(q_i - q_{3-i})} \right]$$

$$\text{para } \rho < 0, q_2 < q_1, -\rho \frac{\sigma_{3-i}}{\sigma_i} < 1$$

$$x_i < \hat{\mu}_i - \left(\frac{\sigma_i}{q_i} \right)^2 \text{ para } \rho = 0$$

$$x_i < \hat{\mu}_i - \left(\frac{\sigma_i}{q_i} \right)^2 - \rho \frac{\sigma_i \sigma_{3-i}}{q_i q_{3-i}} \text{ en el resto de casos,}$$

decrece con el tiempo al vencimiento si, para $i = 1, 2$, se verifica que

$$x_i > \hat{\mu}_i - \left(\frac{\sigma_i}{q_i}\right)^2 - \rho \frac{\sigma_i \sigma_{3-i}}{q_i q_{3-i}} \left[1 - \left(1 - \frac{q_{3-i}}{q_i}\right) \left(-\rho \frac{\sigma_{3-i}}{\sigma_i}\right)^{q_{3-i}/(q_i - q_{3-i})} \right]$$

para $\rho < 0$, $q_2 > q_1$, $-\rho \frac{\sigma_{3-i}}{\sigma_i} > 1$

$x_i > \hat{\mu}_i$ en el resto de casos.

y es una curva no monótona en el resto de casos.

b) En el caso de la curva de rentabilidades, a partir de [19] puede comprobarse que:

$$Y_\tau(x_1, x_2, \tau) = \frac{f(x_1, x_2, \tau) - Y(x_1, x_2, \tau)}{\tau}$$

y un poco de álgebra nos lleva al resultado indicado en el lema.

Demostración de la Proposición 2

Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ los «procesos neutrales al riesgo» definidos por⁵

$$\begin{cases} dx_1 = q_1(\hat{\mu}_1 - x_2)dt + \sigma_1 d\tilde{w}_1 \\ dx_2 = q_2(\hat{\mu}_2 - x_1)dt + \sigma_2 d\tilde{w}_2 \end{cases} \quad [\text{A.10}]$$

y sea $Y(t, u) = \int_t^u (x_1(v) + x_2(v))dv$.

Entonces, podemos aplicar Friedman (1975, Teorema 5.3, p. 148) para obtener la solución de [21] y [22]. Esta solución viene dada por⁶

$$U(x_1, x_2, t, T) = E_{x_1, x_2, t}[g(x_1(T), x_2(T))e^{-Y(t, T)}] \quad [\text{A.11}]$$

Denotando por $p(x_1, x_2, t, u, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, Y)$ la función de densidad de probabilidad conjunta de la variable

$$X(u) = [x_1(u), x_2(u), Y(t, u)]'$$

condicionada a $x_1(t) = x_1, x_2(t) = x_2$, [A.11] equivale a

$$\begin{aligned} U(x_1, x_2, t, T) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) e^{-Y} p(x_1, x_2, t, T, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, Y) dY d\tilde{x}_1 d\tilde{x}_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x_1, x_2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, t, T) g(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) d\tilde{x}_1 d\tilde{x}_2 \end{aligned} \quad [\text{A.12}]$$

donde

$$G(x_1, x_2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, t, T) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Y} p(x_1, x_2, t, u, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, Y) dY \quad [\text{A.13}]$$

Aplicando Arnoldf (1974, Corolario 8.2.4, p. 130), tenemos

$$\begin{aligned} x_1(u) &= e^{-q_1(u-t)}x_1(t) + \int_t^u e^{-q_1(u-z)}[q_1\hat{\mu}_1 dz + \sigma_1 dw_1(z)] \\ x_2(u) &= e^{-q_2(u-t)}x_2(t) + \int_t^u e^{-q_2(u-z)}[q_2\hat{\mu}_2 dz + \sigma_2 dw_2(z)] \end{aligned}$$

Tomando esperanzas, tenemos:

$$\begin{aligned} m_1(t, u) &\equiv E_{x_1, x_2, t}[x_1(u)] = e^{-q_1(u-t)}x_1(t) + (1 - e^{-q_1(u-t)})\hat{\mu}_1 \\ m_2(t, u) &\equiv E_{x_1, x_2, t}[x_2(u)] = e^{-q_2(u-t)}x_2(t) + (1 - e^{-q_1(u-t)})\hat{\mu}_2 \end{aligned}$$

Sea

$$\begin{pmatrix} v_1^2(t, u) & v_{12}(t, u) \\ v_{12}(t, u) & v_2^2(t, u) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} v_1^2 & v_{12} \\ v_{12} & v_2^2 \end{pmatrix}$$

⁵ En este sistema de ecuaciones, $d\tilde{w}_i = dw_i + \lambda_i dt$, $i = 1, 2$. Para obtener el sistema [A.10], hemos utilizado [8], [9] y [12].

⁶ $E_{x_1, x_2, t}[\cdot] = E[\cdot | x_1(t) = x_1, x_2(t) = x_2]$. Similarmente para los términos de varianzas y covarianzas.

la matriz de covarianzas del proceso $[x_1(u), x_2(u)]'$. Aplicando Arnold (1974, teorema 8.2.6, p. 131), esta matriz es la solución de la ecuación

$$\begin{pmatrix} (v_1^2)' & (v_{12})' \\ (v_{12})' & (v_2^2)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_1 & 0 \\ 0 & -q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^2 & v_{12} \\ v_{12} & v_2^2 \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} v_1^2 & v_{12} \\ v_{12} & v_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -q_1 & 0 \\ 0 & -q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

sujeta a la condición terminal

$$\begin{pmatrix} v_1^2(t, t) & v_{12}(t, t) \\ v_{12}(t, t) & v_2^2(t, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La aplicación de teoría estándar para ecuaciones diferenciales ordinarias nos lleva a

$$v_i^2(t, u) = \sigma_i^2 H(2q_i, u - t), \quad i = 1, 2$$

$$v_{12}(t, u) = \rho\sigma_1\sigma_2 H(q_1 + q_2, u - t)$$

donde $H(\cdot)$ viene dada por [15].

Aplicando Arnold (1974, Teorema 8.2.12, p. 133), se puede comprobar que la variable $X(u)$ sigue una distribución normal trivariante. Un poco de álgebra nos conduce a

$$m_Y(t, u) \equiv E_{x_1, x_2, t}[Y(t, u)] = \hat{\mu}_1(u - t) + (x_1(t) - \hat{\mu}_1) H(q_1, u - t) \\ + \hat{\mu}_2(u - t) + (x_2(t) - \hat{\mu}_2) H(q_2, u - t) \quad [\text{A.14}]$$

Intercambiando el orden de integración y aplicando Davidson (1994, sección 30.3, p. 503-509), se obtiene

$$v_Y^2(t, u) \equiv \text{Var}_{x_1, x_2, t}[Y(t, u)] = \sum_{i=1}^2 \sigma_i^2 \frac{H(2q_i, u - t) - 2H(q_i, u - t) + H(0, u - t)}{q_i^2}$$

$$v_{1Y}(t, u) \equiv \text{Cov}_{x_1, x_2, t}[x_1(u), Y(t, u)] = \frac{\sigma_1^2}{2} H^2(q_1, u - t)$$

$$v_{2Y}(t, u) \equiv \text{Cov}_{x_1, x_2, t}[x_2(u), Y(t, u)] = \frac{\sigma_2^2}{2} H^2(q_2, u - t)$$

y, por tanto, obtenemos la distribución de la variable X :

$$X \sim N(\xi, V)$$

donde

$$X = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_y \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_1^2 & v_{12} & v_{1Y} \\ v_{12} & v_2^2 & v_{2Y} \\ v_{1Y} & v_{2Y} & v_Y^2 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente, la densidad de probabilidad conjunta de $X(u)$ condicionada a $x_1(t) = x_1$, $x_2(t) = x_2$ viene dada por

$$p(x_1, x_2, t, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, Y) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}|V|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (X - \xi)' V^{-1} (X - \xi) \right\}$$

Sustituyendo esta expresión en [A.13], obtenemos:

$$G(x_1, x_2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, t, u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}|V|^{1/2}} e^{-Y} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (X - \xi)' V^{-1} (X - \xi) \right\} dY \quad [\text{A.15}]$$

Es inmediato comprobar que

$$G(x_1, x_2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, t, u) = \exp \left\{ \frac{1}{2} v_Y^2 - m_Y \right\} f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$$

donde $f(\cdot)$ es la función de densidad de la variable:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} m_1 - v_{1Y} \\ m_2 - v_{2Y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1^2 & v_{12} \\ v_{12} & v_2^2 \end{pmatrix} \right)$$

Sustituyendo esta expresión en [A.12], se obtiene

$$U(x_1, x_2, t, T) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \frac{1}{2} v_Y^2 - m_Y \right\} f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) g(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) d\tilde{x}_1 d\tilde{x}_2 \quad [\text{A.16}]$$

Si $g \equiv 1$ y $T = u$, la ecuación [A.16] implica que

$$P(x_1, x_2, t, T) = \exp \left\{ \frac{1}{2} v_Y^2(t, T) - m_Y(s, t, T) \right\} \quad [\text{A.17}]$$

La sustitución de [A.17] en [A.16] nos lleva a la expresión final para el precio, en el momento t , del activo derivado sobre tipos de interés.

Demostración del Corolario 1

La ecuación [23] para el caso particular $g(x_1, x_2) = P(x_1, x_2, T_c, T_b)$ implica que el precio, en el momento t , del bono recibido por el comprador de la opción de compra viene dado por

$$P(x_1, x_2, t, T_b) = P(x_1, x_2, t, T_c) E[P(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, T_c, T_b)]$$

Si definimos

$$\tilde{P} = P(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{T}_c, \tilde{T}_b)$$

entonces, se cumple que

$$E[\tilde{P}] = \frac{P(x_1, x_2, t, T_b)}{P(x_1, x_2, t, T_c)} \quad [\text{A.18}]$$

Aplicando [A.17], tenemos

$$\tilde{P} = \exp \left\{ \frac{1}{2} v_Y^2(T_c, T_b) - m_Y(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, T_c, T_b) \right\}$$

Observando [24] y [A.14], se deduce que \tilde{P} sigue una distribución lognormal. Adicionalmente, [A.14] implica que

$$\begin{aligned} \sigma_{\tilde{P}}^2 \equiv \text{Var}[\ln(\tilde{P})] &= H^2(q_1, T_b - T_c) v_1^2(t, T_c) + H^2(q_2, T_b - T_c) v_2^2(t, T_c) \\ &+ 2H(q_1, T_b - T_c)H(q_2, T_b - T_c)v_{12}(t, T_c) \end{aligned}$$

El precio en el momento t , $C(x_1, x_2, t, T_c; K, T_b)$, de la opción de compra anteriormente mencionada se obtiene a partir de [23] con la condición terminal

$$g(x_1(T_c), x_2(T_c)) = C(x_1, x_2, T_c, T_c; K, T_b) = \max\{P(x_1, x_2, T_c, T_b) - K, 0\} \quad [\text{A.19}]$$

La sustitución de [A.19] en [23] lleva a

$$C(x_1, x_2, t, T_c; K, T_b) = P(x_1, x_2, t, T_c)E[\tilde{Z}] \quad [\text{A.20}]$$

donde

$$\tilde{Z} = \max\{\tilde{P} - K, 0\} = (\tilde{P} - K)I_{[K, \infty)}(\tilde{P})$$

e $I(\cdot)$ es la función indicatriz definida como

$$I_{[K, \infty)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < K \\ 1 & \text{si } x > K \end{cases}$$

Entonces

$$E[\tilde{Z}] = \int_K^\infty (\tilde{P} - K)f(\tilde{P})d\tilde{P} \quad [\text{A.21}]$$

Definiendo la nueva variable

$$v(\tilde{P}) = \frac{E[\ln(\tilde{P})] - \ln(\tilde{P})}{\sigma_{\tilde{P}}}$$

y aplicando la relación

$$\ln(E[\tilde{P}]) = E[\ln(\tilde{P})] + \frac{1}{2} V[\ln(\tilde{P})]$$

entonces [A.21] se convierte en

$$E[\tilde{Z}] = E[\tilde{P}]\Phi(h + \sigma_{\tilde{P}}) - K\Phi(h) \quad [\text{A.22}]$$

donde $\Phi(\cdot)$ indica la función de distribución de una variable normal estándar y

$$h = v(K) = \frac{E[\ln(\tilde{P})] - \ln(K)}{\sigma_{\tilde{P}}}$$

Sustituyendo [A.18] y [A.22] en [A.20], se obtiene que la expresión final para el precio de la opción de compra es

$$C(x_1, x_2, t, T_c; K, T_b) = P(x_1, x_2, t, T_b)\Phi(h + \sigma_{\tilde{P}}) - KP(x_1, x_2, t, T_c)\Phi(h)$$

Referencias bibliográficas

- [1] ARNOLD, L. (1974): *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*. John Wiley & Sons Inc., Nueva York.
- [2] BALDUZZI, P.; DAS, S. R.; FORESI, S. y SUNDARAM, R. K. (1996): «A Simple Approach to Three-Factor Affine Term Structure Models», *Journal of Fixed Income*, diciembre, 43-52.
- [3] BRENNAN, M. J. y SCHWARTZ, E. S. (1979): «A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds», *Journal of Banking and Finance*, 133-135.
- [4] CHAN, K. C.; KAROLYI, G. A.; LONGSTAFF, F. A. y SANDERS, A. B. (1992): «An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate», *Journal of Finance*, 47, 3, 1209-1227.
- [5] CHEN, L. (1996): *Interest Rate Dynamics, Derivatives Pricing, and Risk Management*, Springer-Verlag, Berlín.
- [6] COX, J. C.; INGERSOLL, J. E. y ROSS, S. A. (1985): «A Theory of the Term Structure of Interest Rates», *Econometrica*, 53, 385-408.
- [7] DAI, Q. y SINGLETON, K. (2000): «Specification Analysis of Affine Term Structure Models», *Journal of Finance*, 50, 5, 1943-1978.
- [8] DAVIDSON, J. (1994): *Stochastic Limit Theory*, Oxford University Press, Nueva York.
- [9] DOTHAN, U. L. (1978): «On the Term Structure of Interest Rates», *Journal of Financial Economics*, 6, 59-69.
- [10] DUFFIE, D. y KAN, R. (1996): «A Yield-Factor Model of Interest Rates», *Mathematical Finance*, 6, 4, 379-406.
- [11] FRIEDMAN, A. (1975): *Stochastic Differential Equations and Applications*, Academic Press, Nueva York.
- [12] KNEZ, P. J.; LITTERMAN, R. y SCHEINKMAN, J. (1994): «Explorations into Factor Explaining Money Market Returns», *Journal of Finance*, 49, 5, 1861-1882.
- [13] LITTERMAN, R. y SCHEINKMAN, J. (1991): «Common Factors Affecting Bond Returns», *Journal of Fixed Income*, 1, 1, 54-61.
- [14] LONGSTAFF, F. A. y SCHWARTZ, E. S. (1992): «Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model», *Journal of Finance*, 47, 4, 1259-1282.
- [15] MORENO, M. (2003): «A Two-Mean Reverting-Factor Model of the Term Structure of Interest Rates», *Journal of Futures Markets*, 23, 11, 1075-1105.
- [16] RICHARD, S. F. (1978): «An Arbitrage Model of the Term Structure of Interest Rate», *Journal of Financial Economics*, 6, 33-57.
- [17] SCHAEFER, S., y SCHWARTZ, E. S. (1984): «A Two-Factor Model of the Term Structure: An Approximate Analytical Solution», *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 19, 4, 413-424.
- [18] VASICEK, O. (1977): «An Equilibrium Characterization of the Term Structure», *Journal of Financial Economics*, 5, 177-188.