Contabilidad del crecimiento*†

Jeremy Greenwood
Universidad de Rochester

Boyan Jovanovic
Universidad de Nueva York
Universidad de Chicago
National Bureau of Economic Research

Resumen

Una justificación satisfactoria del crecimiento experimentado por los Estados Unidos después de la Segunda Guerra Mundial debería ser consistente con las tres observaciones siguientes:

1. *Desde principios de los años 70 se ha registrado una desaceleración del crecimiento de la productividad.*
2. *El precio del nuevo equipo ha caído de manera continuada a lo largo del período de posguerra.*
3. *Desde mitad de los años 70 la prima a la destreza se ha incrementado.*

Distintas variantes del modelo de generaciones de capital de Solow (1960) pueden explicar en gran medida estas observaciones, como se muestra en este trabajo. Brevemente las explicaciones son:

1. *La productividad redujo su ritmo de crecimiento porque la implementación de las tecnologías de la información fue costosa y lenta.*
2. *El avance tecnológico en el sector de los bienes de capital ha llevado a un descenso en los precios de los bienes de equipo.*
3. *La prima a la destreza aumentó porque el nuevo y más eficiente capital es complementario con el trabajo cualificado y/o porque el uso del trabajo cualificado facilita la adopción de nuevas tecnologías.*

Palabras clave: *progreso técnico específico a la inversión, modelos de generaciones de capital, aprender haciendo, retardos en la difusión.*
Clasificación JEL: *O3, O4.*

Abstract

A satisfactory account of the postwar growth experience of the United States should be able to come to terms with the following three facts:

1. *Since the early 1970's there has been a slump in the advance of productivity.*
2. *The price of new equipment has fallen steadily over the postwar period.*
3. *Since the mid-1970's the skill premium has risen.*

---

* Los autores agradecen a Levent Kockesen su ayuda en la investigación, así como el apoyo de The Nacional Science Foundation y del C.V. Starr Center for Applied Economics at New York University.

† Traducción al español de «Accounting for Growth», por Jeremy Greenwood y Boyan Jovanovic, en Charles R. Hulten, Edwin R. Dean y Michael J. Harper (eds.), *New Developments in Productivity Analysis*. NBER Studies in Income and Wealth, vol. 63, Chicago: University of Chicago Press, 2001; permiso número 100425. Traducción realizada por Matilde Cegarra, edición por Carmen Arias y revisión hecha por Luis A. Puch. Los coordinadores y el editor agradecen la gentileza de los autores y University of Chicago Press por permitirnos reproducir el mencionado artículo. University of Chicago Press no tiene ninguna responsabilidad sobre la traducción al español.

Variants of Solow's (1960) vintage-capital model can go a long way toward explaining these facts, as this paper shows. In brief, the explanations are:

1. *Productivity slowed down because the implementation of information technologies was both costly and slow.*
2. *Technological advance in the capital goods sector has lead to a decline in equipment prices.*
3. *The skill premium rose because the new, more efficient capital is complementary with skilled labor and/or because the use of skilled labor facilitates the adoption of new technologies.*

Keywords*: investment-specific technological progress, vintage-capital models, learning by doing, diffusion lags.*

JEL classifications*: O3, O4.*

1. Introducción

La historia del progreso tecnológico se basa en la invención y posterior aplicación de métodos de producción cada vez más perfeccionados. Todos los modelos de crecimiento incorporan esta idea de alguna manera. Por ejemplo, el célebre modelo de Solow (1956) asume que tanto el progreso tecnológico como su aplicación son gratuitos. El progreso tecnológico llueve como maná caído del cielo y mejora la productividad de todos los factores productivos, nuevos y viejos, igualmente.

Basado en su primer modelo, Solow (1957) propuso lo que ha sido considerado como el marco dominante para la contabilidad del crecimiento. Su ecuación principal es $y = zF(k, l)$, donde y es la producción, k y l son las cantidades de *input* capital (calculado de acuerdo con el método de inventario permanente) y de trabajo, y z es la medida del estado de tecnología. Si k y l fueran homogéneos, éste sería el método adecuado que se debería aplicar. En principio, este marco permitiría separar la contribución de lo que es medido, k y l, de lo que queda sin medir, z. Ahora bien, ni k ni l son homogéneos en la práctica, pero se puede esperar que algún tipo de agregación hiciera válido el procedimiento –si no exactamente, al menos de forma aproximada.

El problema de este enfoque es que considera todas las *generaciones (o cosechas)* de capital (o de trabajo) como iguales. En realidad, los avances tecnológicos tienden a estar incorporados en las últimas cosechas de capital. Esto significa que el nuevo capital es mejor que el viejo capital, no sólo porque las máquinas se deterioran y rompen con el tiempo, sino también porque el nuevo capital es mejor que lo era el viejo, incluso cuando éste era nuevo. Esto también significa que no puede haber progreso tecnológico sin inversión. Si esto es lo que «incorporación de la tecnología al capital» significa, entonces esta idea no puede ser recogida en el marco de Solow (1956, 1957) por las razones que él mismo (1960, 90) describe acertadamente:

> Es como si todo el progreso tecnológico fuera algo como el estudio del tiempo y del movimiento, una manera de mejorar la organización y el funcionamiento de los *inputs* sin referencia a la naturaleza de los propios *inputs*. El supuesto sorprendente es que el viejo y el nuevo capital participan por igual en el progreso tecnológico. Esto choca con la simple observación de que casi todas las innovaciones necesitan ser incorporadas por medio de nuevos

> tipos de equipos duraderos antes de que puedan ser efectivas. Los avances tecnológicos tienen influencia en la producción sólo cuando son llevados a la práctica mediante la formación de capital neto o por el reemplazo de los equipos pasados de moda por los de último modelo…

En otras palabras, a diferencia de Solow (1956, 1957), la implementación no es gratuita, sino que requiere la adquisición de nuevas máquinas. Además, también requiere nuevo capital humano ya que tanto los trabajadores como la dirección deben aprender a utilizar la nueva tecnología. Este aprendizaje se realizará bien a través de la experiencia o de la formación, o de ambas. Este tipo de progreso tecnológico es denominado aquí *específico a los bienes de inversión*; se debe invertir para beneficiarse de él.

Si esta visión es correcta, la contabilidad del crecimiento debería tener en cuenta los numerosos tipos de capital físico y humano, cada uno específico al menos en la parte de la tecnología a la que se incorpora. En otras palabras, la contabilidad del crecimiento debería desarrollarse en un marco de *generaciones o cosechas* de capital, *vintage capital*. Este documento sostiene que un modelo de generaciones de capital puede esclarecer algunas de las principales claves sobre el crecimiento económico experimentado en los Estados Unidos desde el final de la Segunda Guerra Mundial. Los conocidos modelos de Lucas (1988) y de Romer (1990) no encajan en este marco. En el modelo de Lucas, todo capital físico, ya sea viejo o nuevo, «participa por igual» en el progreso tecnológico que genera el sector de capital humano; y, como enfatiza la cita de Solow, esto no encaja con la simple observación de cómo funciona el progreso. Por el contrario, el modelo de Romer *es* un modelo de generaciones de capital. Los nuevos bienes de capital son inventados en cada período, pero el capital nuevo no es mejor que el anterior. Es simplemente diferente y amplía el menú de aportaciones disponibles, lo que se supone que hace más eficaz la producción. De esta forma el capital no se hace obsoleto cuando envejece –una consecuencia que niega el hecho obvio de que las viejas tecnologías son continuamente sustituidas por otras nuevas.

1.1. Resumen del argumento y de los resultados

Exploramos aquí las diferentes variantes del modelo de generaciones de capital de Solow (1960), pero arrancamos con una breve revisión sobre la contabilidad del crecimiento de posguerra norteamericano utilizando el marco estándar de Solow (1957).

Por qué el modelo $y = zF(k, l)$ no es satisfactorio

El modelo de Solow (1957) es el marco esencial de la contabilidad del crecimiento, y la sección 2 lo utiliza para un breve ejercicio de contabilidad del crecimiento durante el período de posguerra. El punto fundamental es que este modelo es incapaz de justificar estas cuatro observaciones:

1. *La desaceleración prolongada del crecimiento de la productividad que comenzó hacia 1973*. ¡Para explicar la ralentización el modelo enfatiza que el progreso técnico ha estado detenido desde 1973! Esto, por supuesto, está reñido con la sencilla observación de los acontecimientos: ordenadores personales, teléfonos móviles, robots e Internet, entre otros.
2. *La caída del precio relativo de los bienes de capital respecto a los bienes de consumo*. Este precio descendió un 4 por 100 por año durante el período de posguerra, y es un síntoma de la obsolescencia del capital viejo causada por la llegada de capital nuevo y mejor. Este descenso relativo del precio no es compatible con un modelo unisectorial de crecimiento como el de Solow (1956, 1957).
3. *La productividad de una planta que opera con la mejor tecnología disponible es bien distinta que la de la planta promedio*. Pueden diferir en dos, tres, o más veces, dependiendo de la industria. Esto no concuerda con un modelo como el de Solow (1956, 1957), en el que todas las empresas usan la misma función producción.
4. *El reciente aumento de la desigualdad salarial*. El marco no dice nada al respecto.

¿Por qué la versión básica del modelo de generaciones *de capital no es satisfactoria?*

El apartado 3 introduce la versión básica del modelo de generaciones de capital de Solow (1960), en el que el progreso tecnológico es exógeno y está incorporado en la forma de nuevos bienes de capital. Basándose en el precio del nuevo equipo relativo al precio de los bienes de consumo, la mejora tecnológica en equipo se estima que es un 4 por 100 por año durante el período de posguerra. Esto hace que el stock de capital efectivo haya crecido más deprisa de lo que se estima en los cálculos convencionales. Como consecuencia, ¡el descenso de productividad implícito después de 1973 es incluso mayor que la estimación obtenida en el marco de Solow (1957)! Esto representa un problema para los sistemas que identifican la Productividad Total de los Factores (PTF) como una medida del progreso técnico, un dato que Abramovitz designó como «una medida de nuestra ignorancia». ¿Puede el marco de Solow (1960) racionalizar esta desaceleración de la productividad?

Añadiendo los retardos en la difusión y el aprendizaje específico a la tecnología al modelo básico de generaciones de capital

Una modificación del modelo de generaciones de capital que puede producir un descenso de la productividad es la introducción de una curva de aprendizaje específica a la tecnología por parte de los que emplean de los bienes de capital. Los efectos del aprendizaje pueden ser amplificados aún más si se añaden los *efectos desbordamiento*, *spillovers*, en el aprendizaje entre los usuarios de los bienes de capital.

Otro cambio importante es incluir los retardos en la difusión de las nuevas tecnologías. El análisis supone que la eficiencia de la inversión específica a la generación de capital empieza a crecer más rápidamente a principios de los años 70 con la llegada de las tecnologías de la información, y que las nuevas tecnologías han hecho más pronunciadas las curvas de aprendizaje. Además, se presupone que, para estas tecnologías, su difusión en el seno de la economía lleva algún tiempo. Esto nos lleva a una explicación *vintage* de la «desaceleración (del crecimiento) de la productividad» como un período en el que se subestima, por encima de lo normal, la inversión en capital humano específico a las tecnologías que comenzaron a ser operativas a principios de los setenta.

Consecuencias en la desigualdad de los salarios

El descenso de la productividad ha venido acompañado por un aumento de la prima a la destreza. Hay muchas posibilidades de que ambos fenómenos estén relacionados, y en la sección 5 se explica el porqué. Hay dos tipos de explicaciones sobre el reciente aumento de la desigualdad. La primera, propuesta por Griliches (1969), enfatiza el papel de la destreza en el *uso* de los bienes de capital, y es conocida como la hipótesis de «complementariedad entre capital y destreza», *capital-skill complementarity*. La segunda hipótesis, propuesta en primer lugar por Nelson y Phelps (1966), acentúa el papel de la destreza en la *implementación* de la nueva tecnología, y es conocida como «destreza en la adopción», *skill in adoption*. Ambas explicaciones pueden ser incorporadas a un modelo de generaciones de capital.

Endogeneizar el crecimiento en el modelo de generaciones de capital

La sección 6 presenta tres modelos en los que el crecimiento es endógeno, cada uno de los cuales se basa en un motor diferente de crecimiento. Cada motor requiere un combustible diferente para funcionar. Para analizar el crecimiento económico se necesita saber la importancia de los motores; cada uno tendrá diferentes consecuencias sobre cómo los recursos serán asignados en la producción de consumo presente y futuro.

'Aprender haciendo' como motor. El apartado 6.1 describe el modelo de crecimiento de Arrow (1962) 'de aprendizaje por la práctica,' *learning by doing*, en el sector de bienes de capital. 'Aprender haciendo' es el motor que encaja más de cerca con el modelo original de generaciones de capital de Solow (1960), porque el crecimiento tecnológico que genera no utiliza recursos. Es decir, todo el trabajo y el capital empleados son destinados a la producción de bienes de capital o de bienes de consumo. Tan pronto como aumenta la eficiencia de los productores de bienes de capital, disminuye el precio relativo de los bienes de capital.

La investigación como motor. El apartado 6.2 destaca el modelo de I+D en el sector de bienes de capital de Krusell (1998). En éste, cada productor de bienes de capital debe decidir cuánto trabajo ha de emplear para aumentar la efectividad de los bienes de capital que vende.

Capital humano como motor. El apartado 6.3 supone que los productores de bienes de capital pueden pasar a una tecnología mejor si acumulan los conocimientos tecnológicos específicos requeridos. Este apartado amplía el modelo de Parente (1994) en el que el coste de aumentar la eficiencia de la productividad es la producción necesaria a la que se renuncia mientras que la nueva tecnología se desarrolla a mayor velocidad mediante el aprendizaje.

¿A qué se parece la mecánica? Estos tres modelos tienen una estructura común: todos tienen un sector de bienes de consumo y de bienes de capital, y todos poseen un progreso técnico endógeno tan sólo en el sector de bienes de capital. Este progreso técnico pasa después a los productores de bien final bajo la forma de un «efecto externo pecuniario» transmitido por el precio relativo decreciente del capital. No obstante, cada modelo se centra exclusivamente en un motor del crecimiento; y, aunque esto simplifique la explicación, no da una idea de la importancia de cada motor para el crecimiento en su totalidad.

A menos que su descubrimiento fuera accidental, siempre que una nueva tecnología aparece en el menú de la sociedad, la sociedad paga un coste por la invención. Luego, la sociedad tiene que pagar un coste de aplicación –el coste del capital físico y humano específico a la nueva tecnología–. La sociedad sólo necesita pagar una vez el coste de invención por cada tecnología, mientras que el coste de aplicación debe ser pagado por cada usuario[1]. Después de éstos, sólo quedan los costes de utilización de la tecnología –«los costes de producción»–. No es de extrañar, entonces, que la sociedad gaste mucho menos en investigación de lo que gasta en los diversos costes necesarios para implementar las tecnologías. Incluso en los Estados Unidos, Jovanovic (1997) estima que los costes de implementación son 20 veces superiores a los costes de investigación.

Como las personas tienen que aprender a utilizar las nuevas tecnologías, se entiende que los costes de aprendizaje asociados a la adopción de estas tecnologías –ya sean mediante la enseñanza, la experiencia, o la formación durante el trabajo-, son ineludibles al nivel de un país. Como el objeto de este ejercicio es la contabilidad del crecimiento en los Estados Unidos, se puede concluir que la enseñanza, la experiencia, o la formación son, combinadas de cierta manera, esenciales para que tenga lugar el crecimiento[2]. Por otra parte, la investigación, evidentemente, no es esencial, ya que la mayoría de las naciones del mundo han crecido no por inventar sus propias tecnologías, sino aplicando las tecnologías inventadas por otros. Presumiblemente los Estados Unidos podrían hacer lo mismo (asumiendo que otros países avanzarían las fronteras del conocimiento).

---

[1] El coste medio de implementación puede, sin embargo, ser decreciente en el número de usuarios si hay sinergias en la adopción.

[2] JOVANOVIC y ROB (1998) comparan los marcos de SOLOW (1956, 1960) a partir de la experiencia del crecimiento entre países.

1.2. Por qué los modelos importan para la contabilidad del crecimiento

En sus inicios, el mensaje de la Comisión Cowles fue que aparte de la propia satisfacción de la curiosidad intelectual sobre cómo funciona el mundo, los modelos permitirían a un nivel práctico: a) predecir las consecuencias de variaciones en políticas y otras variables exógenas; (b) orientar en la medición de las variables; y (c) abordar los problemas de simultaneidad. Generalmente, estos puntos se aplican a los modelos económicos, y, por supuesto, se relacionan con el valor de los modelos que explican el crecimiento. Vale la pena explicar el porqué.

Análisis de políticas. Denison (1964, 90) afirmó que «la cuestión de la incorporación (del progreso técnico) no tiene mucha importancia en el análisis de política económica en los Estados Unidos». Denison basa esta afirmación en su cálculo acerca de que un año de diferencia en la edad media del capital tendría un mínimo impacto en la producción. Este análisis no va en la buena dirección. Diferentes modelos sugerirán diferentes políticas de fomento del crecimiento. Por ejemplo, en la versión del modelo de 'aprender haciendo' de Arrow (1962) presentada aquí, hay efectos de desbordamiento a escala industrial en la producción de bienes de capital, y una política que subsidia la producción de bienes de capital mejoraría la prosperidad. Sin embargo, en el modelo de Parente (1994), los productores de bienes de capital internalizan por completo los efectos de cualquier inversión para la mejora de la experiencia específica a la tecnología. Ese entorno es eficiente. Las políticas gubernamentales pueden promover el crecimiento, pero sólo a expensas del bienestar. Surgen otras cuestiones de política. Los modelos de generaciones de capital predicen un reemplazo continuo de las viejas tecnologías por otras nuevas más eficientes. Ya que un trabajador necesita prepararse para utilizar una tecnología, al hacerse obsoleta dicha tecnología, el trabajador se hace obsoleto con ella. Esto puede tener consecuencias para cuestiones tales como el desempleo. Estas consideraciones llevaron a Stigler, hace mucho tiempo, a concluir que la inseguridad laboral es el precio que la sociedad tiene que pagar por el progreso[3].

La medición de las variables. La teoría económica proporciona una guía sobre qué cosas deberían medirse y cómo medirlas. Por ejemplo, el modelo de referencia de generaciones de capital desarrollado aquí sugiere que el descenso del precio relativo del nuevo equipamiento puede ser identificado con el ritmo del progreso tecnológico en el sector de bienes de equipo. También provee una orientación sobre cómo el stock agregado de equipamiento debería medirse –y este stock crece más

[3] «Deberíamos querer tener al mismo tiempo un rápido aumento en la producción agregada y estabilidad en su composición: lo primero para mantenernos al ritmo de la expansión de nuestras necesidades y lo segundo para evitar las pérdidas de equipo especializado de los empresarios y de los empleados, así como la creación de industrias 'enfermas' en las que los recursos son menos móviles que los clientes. Es muy probable que ambos objetivos sean inconsistentes» (STIGLER, 1947, 30).

rápidamente que la medida correspondiente de las cuentas nacionales (National Income and Product Accounts, NIPA). Más en general, en un mundo con progreso técnico específico a la inversión, los nuevos bienes de capital serán más productivos que los anteriores. Los precios de alquiler de los bienes de capital, nuevos y viejos, son indicadores del grado de progreso técnico específico a la inversión. Por ejemplo, la diferencia en alquileres entre edificios viejos o nuevos (o el gradiente de los alquileres) puede ser utilizada para dar una idea acerca de la cantidad de progreso técnico que ha habido en las estructuras.

La inversión en capital físico se contabiliza en NIPA, mientras que, por el contrario, la inversión en conocimiento no se contabiliza. Sin embargo, la inversión en conocimiento puede aumentar la producción mañana de la misma manera que lo hace la inversión en capital físico. Esto se denomina a veces al problema de la inversión que no se mide. En los Estados Unidos, los gastos en I+D son aproximadamente del 3 por 100 del Producto Interior Bruto (PIB). Los costes de aplicación de las nuevas tecnologías, en términos de aprendizaje, formación en el trabajo y otros, pueden ascender al 10 por 100 del PIB. Los modelos de Krusell (1998) y Parente (1994) sugieren que tales gastos son tan vitales para la realización de la producción futura, como lo es la inversión en equipos y en estructuras. En NIPA, tales desembolsos se consideran gasto o son deducidos de los beneficios empresariales, en lugar de ser capitalizados dentro de los beneficios, como cuando una empresa hace una nueva inversión material. De acuerdo con estos números, el PIB sería un 13 por 100 más alto si las inversiones no medidas fueran tenidas en cuenta.

Esta es, en realidad, una de las formas por las que el modelo de generaciones de capital puede explicar el descenso de la productividad – la cosecha de tecnologías que llegó en torno a 1974 fue prometedora, pero estuvo sujeta a prolongadas curvas de aprendizaje y a elevados costes de adopción. En otras palabras, el descenso de la productividad tuvo lugar porque hubo una gran cantidad de inversión no medida. Los procedimientos habituales de contabilidad del crecimiento subestimarán las mejoras de la productividad en la medida que subestiman el crecimiento de la producción debido a estas inversiones no medidas. Esto puede sugerir que se debe poner más esfuerzo en la recopilación de datos agregados de I+D y de los costes de adopción.

Problemas de simultaneidad. La contabilidad del crecimiento convencional utiliza una función de producción agregada para descomponer el crecimiento de la producción en progreso técnico y cambios en los *inputs* de una manera que utiliza al mínimo la teoría económica. Sin embargo, es evidente que una gran parte del crecimiento en el stock de capital –equipos y estructuras– se debe al progreso tecnológico. El enfoque de equilibrio general tomado aquí permite que el crecimiento en el stock de capital se descomponga entre las fuentes subyacentes de progreso tecnológico. Además, vincula el descenso observado en el precio del nuevo equipo con la tasa de progreso tecnológico en la producción de nuevo equipo. Los modelos nos permiten relacionar los gradientes observados en los alquileres de edificios con la tasa de progreso tecnológico en estructuras; asimismo permiten asociar los largos retardos en la difusión de productos y tecnologías con los costes de adoptarlos. Los modelos conducen a inferencias más precisas acerca de dichas simultaneidades.

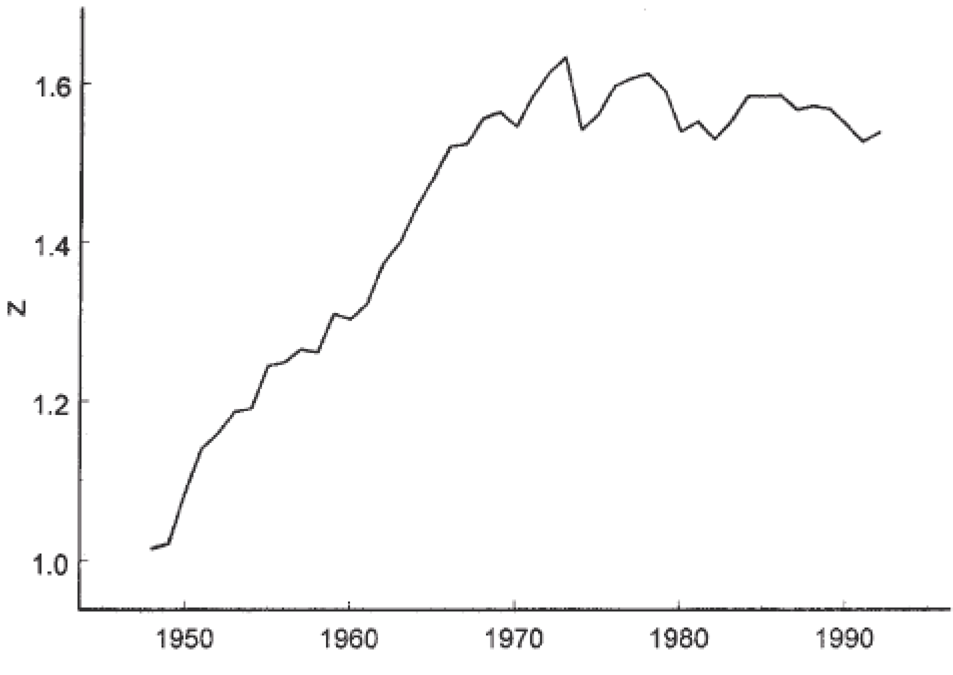
2. Solow (1957) y el Progreso Tecnológico Neutral

En uno de esos artículos poco frecuentes que cambian el curso de la economía, Solow (1957) propuso una forma de medir el progreso técnico. Suponemos que la producción, y, se obtiene de acuerdo con la función de producción de rendimientos constantes a escala

$$y = zF(k, l) \tag{1}$$

donde k y l son los *inputs* capital y trabajo. La variable z mide el estado de la tecnología en la economía, y el progreso técnico es neutral. Con el paso del tiempo, z crece, reflejando la mejora tecnológica de la economía. De esta forma, para un nivel dado de *inputs*, k y l, se puede obtener más producto, y.

FIGURA 1
MEDIDA ESTÁNDAR DEL PROGRESO TÉCNICO NEUTRAL



Para cualquier variable x, la expresión $g_x \equiv (1/x)(dx/dt)$ significa su tasa de crecimiento. Si la economía es competitiva, la tasa de progreso técnico puede ser medida por

$$g_z = g_{y/l} - \alpha g_{k/l} \tag{2}$$

donde α representa la participación del capital en la renta.

La tasa de progreso técnico, g_z, puede ser fácilmente medida a partir de la ecuación (2), a partir de los datos de PIB, y, del stock de capital, k, de las horas trabajadas, l, y de la participación de los salarios en la renta, $1 - \alpha$. La Figura 1 representa z en el período de posguerra. La figura pone de manifiesto que el crecimiento de z se desaceleró dramáticamente hacia 1973[4]. La literatura se refiere a este fenómeno como el «*productivity slowdown*,» la desaceleración de la productividad. ¿Es razonable creer que el progreso técnico ha permanecido estancado desde 1973? Difícilmente. La observación casual sugiere lo contrario: ordenadores, robots, teléfonos móviles, y así sucesivamente.

Quizás parte de la explicación es que algún cambio cualitativo en la producción no ha sido convenientemente medido, por lo que g_y queda minusvalorado. No obstante, las medidas que se han utilizado para k y l no controlan por cambios en la calidad de los factores, lo cual lleva las cosas en la dirección opuesta y hace que la anomalía parezca aún mayor. ¿Hay algún error en la noción de progreso tecnológico en el modelo de Solow (1957)? Las secciones restantes analizan diversos modelos de generaciones de capital en los que el progreso técnico es específico a la inversión.

3. Solow (1960) y el Progreso Tecnológico Específico a la Inversión

En un artículo menos conocido, Solow (1960) desarrolla un modelo que incorpora el progreso técnico en los *nuevos* bienes de capital

La producción de bien final. Supongamos que el bien final se produce de acuerdo con la siguiente función de producción de rendimientos constantes a escala:

$$y = F(k, l) \tag{3}$$

Obsérvese que no hay progreso tecnológico neutral. La producción puede ser utilizada para dos propósitos: consumo, c, e inversión bruta, i. De este modo, la restricción de recursos económicos indica que: $c + i = F(k, l)$.

[4] De hecho, durante todo el periodo creció por término medio a la insignificante tasa de 0,96 por 100 por año.

Acumulación de capital. Ahora, supongamos que la acumulación de capital está governada por la ley del movimiento:

$$\frac{dk}{dt} = iq - \delta k \tag{4}$$

donde i es inversión bruta y δ es la tasa de depreciación física del capital. Aquí q representa el estado actual de la tecnología para producir nuevas máquinas. A medida que q aumenta, se pueden producir más nuevos bienes de capital por cada unidad de producción o consumo a la que se renuncia. Esta forma de progreso tecnológico es específica al sector de bienes de inversión de la economía. Por lo tanto, nos referimos a los cambios en q como progreso técnico específico a la inversión. Dos implicaciones importantes de la ecuación (4) son:

1. Para disfrutar de los rendimientos de esta forma de progreso técnico tiene que haber inversión en la economía. Esto no es el caso del progreso tecnológico neutral, como se supone en Solow (1957).
2. Las unidades eficientes de capital de las diferentes cosechas pueden agregarse linealmente para la ecuación (3) si se utilizan los pesos adecuados para las inversiones pasadas:

$$k(t) = \int_0^{\infty} e^{-\delta s} q(t-s) i(t-s) ds$$ [5]

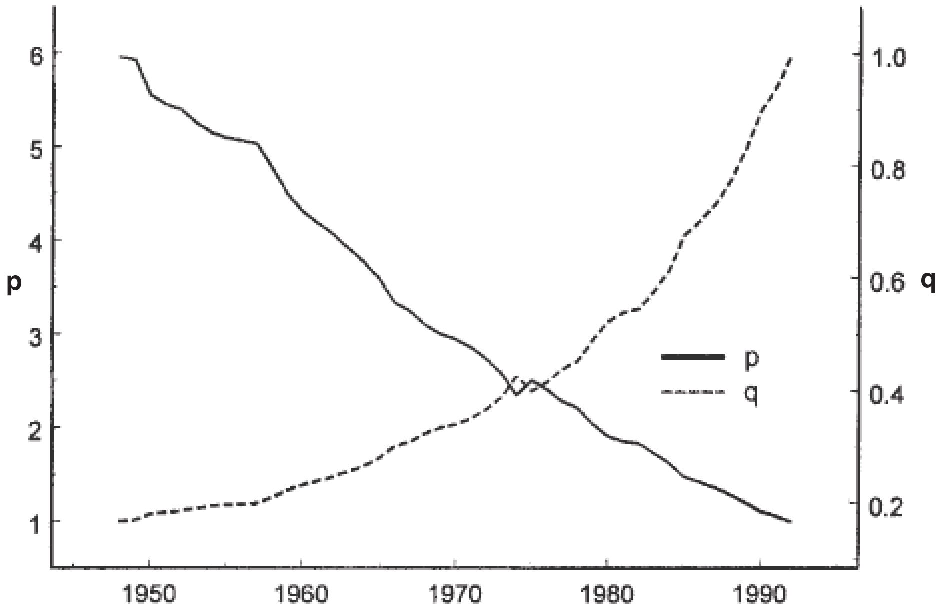
El precio relativo del capital. En un equilibrio competitivo el precio relativo de los nuevos bienes de capital, p, vendría dado por $p = 1/q$, porque esta relación indica la cantidad de producción o de bienes de consumo que deben ser entregados para comprar una nueva unidad de equipo. Por consiguiente, en el marco anterior es fácil identificar la tasa de progreso técnico específico a la inversión, q, usando una serie de precios para los nuevos bienes de capital –esto es, utilizando la relación $q = 1/p$.

Contabilidad del crecimiento en el modelo básico. La Figura 2 muestra la serie de precios de los nuevos equipos y la serie que implica para la tecnología de producción de bienes de inversión. Obsérvese cómo estas series representan mucho mejor el progreso tecnológico, que asciende de forma más o menos continua durante el periodo de posguerra; aquí no hay desaceleración de la productividad.

Entonces, ¿cuánto crecimiento económico de posguerra es debido al progreso técnico específico a los bienes de inversión y cuánto al progreso técnico neutral?

[5] BENHABIB y RUSTICHINI (1991) relajan este supuesto y consideran una tasa variable de sustitución en la producción entre capital de distintas generaciones.

FIGURA 2
PRECIO RELATIVO DEL EQUIPO, *p*, Y PROGRESO TÉCNICO ESPECÍFICO A LA INVERSIÓN, *q*



Para medir esto, suponemos que la producción viene dada por la función de producción

$$y = zk_e^{\alpha_e} k_s^{\alpha_s} l^{1-\alpha_e-\alpha_s} \tag{5}$$

donde k_e y k_s representan el stock de equipos y estructuras en la economía, respectivamente. Supongamos que el equipo sigue una ley de acumulación similar a la ecuación (4) de modo que

$$\frac{dk_e}{dt} = qi_e - \delta_e k_e \tag{6}$$

donde i_e es inversión bruta en equipo medida en unidades de consumo y δ_e es la tasa de depreciación física del equipo. De esta forma, el equipo está sujeto al progreso técnico específico a la inversión. La ley de movimiento para la acumulación de estructuras es

$$\frac{dk_s}{dt} = i_s - \delta_s k_s \tag{7}$$

donde i_s representa la inversión bruta en estructuras medida en unidades de consumo y δ_s es la tasa de depreciación física. La restricción de recursos de la economía se interpreta ahora como[6]

$$c + i_e + i_s = y \tag{8}$$

Es fácil de calcular a partir de la ecuación (5), conjuntamente con las ecuaciones (6)-(8), que a lo largo de la trayectoria de crecimiento equilibrado de la economía la tasa de crecimiento de la renta viene dada por

$$g_y = \left(\frac{1}{1-\alpha_e-\alpha_s}\right) g_z + \left(\frac{\alpha_e}{1-\alpha_e-\alpha_s}\right) g_q \tag{9}$$

Para implementar esta fórmula, se necesitan valores numéricos para α_e, α_s, g_z y q_q. Suponemos que $\alpha_e = 0{,}17$ y $\alpha_s = 0{,}13$[7]. Durante el período de posguerra la tasa de progreso técnico específica a la inversión alcanzó una media de 4 por 100 por año, un hecho que puede ser calculado a partir de las series para q que muestra la Figura 2. De ahí que $g_q = 0{,}04$. Se puede obtener una medida para z a partir de la relación de producción en la ecuación (5) que implica $z = (y/[k_e^{\alpha_e} k_s^{\alpha_s} l^{1-\alpha_e-\alpha_s}])$. Se puede calcular z a partir de series de datos de y, k_e, k_s y l. Es fácil disponer de estas series, excepto para k_e. Esta serie puede construirse utilizando la ley de movimiento de la ecuación (6) y datos para q e i_e. De acuerdo con NIPA, la tasa de depreciación física en equipamiento que se considera es del 12,4 por 100, de modo que $\delta_e = 0{,}124$. Siguiendo este procedimiento, la tasa media de progreso tecnológico neutral fue estimada en un 0,38 por 100. La ecuación (9) implica que el progreso tecnológico específico a la inversión representó un 63 por 100 del crecimiento de la producción, mientras que el progreso tecnológico neutral representó un 35 por 100[8].

Por qué el modelo de base no es adecuado. Sin embargo, no todo cuadra en este modelo. Con la corrección por las mejoras en la calidad de los bienes de capital, ésta crece más rápidamente de lo que lo hace k en la versión de Solow (1957). Cuando esta serie revisada se inserta en la función de producción para los bienes finales, el descenso de la productividad que implica es aún mayor de lo que resultaba en el marco de Solow (1957). ¿Cómo se puede explicar este descenso? La respuesta parece estar en la introducción de los retardos en el aprendizaje de la utilización de las nuevas tecnologías hasta su potencial completo, y en los retardos en la difusión de nuevas tecnologías.

---

[6] GREENWOOD, HERCOWITZ y KRUSELL (1997) utilizan este sistema para la contabilidad del crecimiento. HULTEN (1992) emplea un marco similar pero reemplaza la restricción de recursos por $c + i_e q + i_s = y$. Véase GREENWOOD, HERCOWITZ y KRUSELL (1997) para una discusión sobre las consecuencias de esta sustitución.

[7] Esto es lo que GREENWOOD, HERCOWITZ y KRUSELL (1997) estimaron.

[8] La segunda parte del apéndice muestra lo que sucedería si un contable del crecimiento descuidara la incorporación del progreso técnico específico a la inversión en su análisis.

4. Ajustes el Modelo Básico de Solow (1960)

Esta sección introduce los retardos en el aprendizaje y en la difusión de nuevas tecnologías. El marco es necesariamente uno en el que las plantas difieren en las tecnologías que utilizan. Como veremos, resulta que la agregación a un simple modelo de crecimiento no es siempre posible en este marco. Presentamos algunas de las condiciones en la tecnología y en la estructura *vintage* que aseguran la agregación de Solow (1960).

4.1. Heterogeneidad de las plantas y la Agregación del Capital

Notación. Algunas de las siguientes variables son específicas a la planta. Puesto que plantas de diferentes edades, τ, coexistirán en cualquier fecha, a veces es necesario distinguir estas variables con un doble índice. La notación $x_t(\tau)$ significará el valor de la variable x en la fecha t de una planta que tiene edad τ. La generación de la planta es entonces $v = t - \tau$. Las variables que no son específicas a la planta doble serán indexadas sólo con t. El índice t será eliminado siempre que sea posible.

Producción de bienes finales. Los bienes finales son producidos en varias plantas, cada una de las cuales es indexada por su generación. Entonces, la producción de un equipo de edad τ se describe con la función de producción

$$y_\tau = z_\tau k_\tau^\alpha l_\tau^\beta, \;\; 0 < \alpha + \beta < 1$$

donde z_τ es el PTF de la planta y k_τ y l_τ son las reservas de capital y de trabajo que emplea. Por ahora, z_t es exógeno. El capital de una planta se deprecia a la tasa δ y no puede ser aumentado una vez instalado.

Progreso técnico específico a los bienes de inversión. Se recuerda que g_q es la tasa de progreso técnico específico a la inversión. Luego, como antes, una unidad de eficiencia de nuevo capital cuesta $1/q(t) = p(t) = e^{-egt}$ unidades de consumo en el instante t. El coste del capital para la nueva planta en el instante t es por lo tanto $k_0(t)/q(t)$.

Nivel óptimo de empleo. Una planta precio-aceptante de edad τ contratará trabajo hasta que el producto marginal del trabajo iguale el salario, w. De ahí, $\beta z_\tau k_\tau^\alpha l_\tau^{\beta-1} = w$, de modo que

$$l_\tau = \left(\frac{\beta z_\tau k_\tau^\alpha}{w}\right)^{1/(1-\beta)} \tag{10}$$

y

$$y_\tau = \left(\frac{\beta}{w}\right)^{\beta/(1-\beta)} z_\tau^{1/(1-\beta)} k_\tau^{\alpha/(1-\beta)} \tag{11}$$

Vaciado del mercado de trabajo. Suponemos que operan n_τ plantas de edad τ. Si la dotación agregada de trabajo está fija al nivel h, el vaciado del mercado de trabajo exige que

$$\int_0^\infty n_\tau l_\tau d\tau = h$$

Sustituyendo la ecuación (10) por esta última fórmula es posible obtener la siguiente expresión para el salario que vacía el mercado de trabajo

$$w = \beta \left[\frac{\int_0^\infty n_\tau (z_\tau k_\tau^\alpha)^{1/(1-\beta)}\, d\tau}{h}\right]^{1-\beta} \tag{12}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (11) tenemos como resultado la producción de una planta de edad τ como sigue:

$$y_\tau = z_\tau^{1/(1-\beta)} k_\tau^{\alpha/(1-\beta)} \left[\frac{h}{\int_0^\infty n_\tau (z_\tau k_\tau^\alpha)^{1/(1-\beta)}\, d\tau}\right]^{\beta}$$

Producción agregada. La producción agregada es la suma de las producciones sobre todas las plantas: $y = \int_0^\infty n_\tau y_\tau d\tau$. Por consiguiente, es igual a

$$y = \frac{h^\beta \int_0^\infty n_\tau z_\tau^{1/(1-\beta)} k_\tau^{\alpha/(1-\beta)}\, d\tau}{\left[\int_0^\infty n_\tau (z_\tau k_\tau^\infty)^{1/(1-\beta)}\, d\tau\right]} = h^\beta \left(\int_0^\infty n_\tau z_\tau^{1/(1-\beta)} k_\tau^{\alpha/(1-\beta)}\, d\tau\right) \tag{13}$$

La agregación de Solow (1960). Este modelo es similar al modelo de referencia de generaciones de capital. De hecho, se agrega exactamente como él si se dan los tres siguientes supuestos:

1. Rendimientos a escala constantes (de modo que $\alpha = 1 - \beta$).
2. La Productividad Total de los Factores (PTF) es la misma en todas las plantas (de modo que $z_\tau = z$).
3. El número de plantas de cada generación no cambia a lo largo del tiempo.

Esto es, $n_{t-\nu}(t) = n_0(\nu)$, o equivalentemente, $n_\tau(t) = n_0(t - \tau)$, cuando $\nu = t - \tau$. En otras palabras, toda la inversión se realiza en las plantas de la generación actual, y las plantas duran para siempre –es su capital el que desaparece de forma asintótica.

En esta situación, $y = zh^{1-\alpha}\mathbf{k}^\alpha$, donde el stock de capital agregado $\mathbf{k}$ se define por $\mathbf{k}(t) = \int_{-\infty}^{t} n_{t-\nu}(t)k_{t-\nu}(t)d\nu$. El capital en cada planta se deprecia a la tasa δ, lo que sig-significa que para cualquier $\nu \leq t$,

$$\frac{dk_{t-\nu}(t)}{dt} = -\delta k_{t-\nu}(t)$$

Además, por el supuesto (3), $[dn_{t-\nu}(t)]dt = 0$ para cualquier $\nu \leq t$. Por lo tanto,

$$\frac{d\mathbf{k}(t)}{dt} = -\delta\mathbf{k}(t) + q(t)i(t)$$

donde $i(t) = [n_0(t)k_0(t)]/q(t)$ es la inversión bruta (medida en unidades de consumo)[9]. Si se identifica h y $\mathbf{k}$ con l y k en las ecuaciones (3) y (4), los dos modelos tendrán predicciones idénticas[10].

Entonces, para que el modelo de generaciones de capital que se presenta difiera de forma significativa del modelo de referencia con progreso técnico específico a la inversión, se debe relajar alguna combinación de los supuestos (1), (2) y (3). Sin esto, el modelo sería incapaz de resolver la anomalía de la desaceleración de la productividad.

Supuesto de inversión episódica. A partir de ahora, para el resto de la Sección 4, se da por supuesto que el proyecto de una nueva planta en fecha t requiere una masa *fija* de capital, $k_0(t)$. Supongamos que $k_0(t)$ crece a una tasa constante $\kappa \equiv g_q/(1 - \alpha)$ a lo largo del tiempo[11]. Esto es, las unidades de eficiencia del capital incorporado a

---

9 Tiene sentido que bajo rendimientos a escala constantes sólo es importante la cantidad agregada de inversión, y no cómo se reparte entre las plantas.

10 Incluso sin estos supuestos, el modelo se comportará de forma similar en crecimiento equilibrado. Suponemos por el momento que el número de plantas es constante a lo largo del tiempo, por lo que $n_\tau = n$ y z_τ crece a la tasa g_z. La oferta de trabajo será constante en crecimiento equilibrado. Ahora, a lo largo de la trayectoria de crecimiento equilibrado, producción e inversión deben crecer a una tasa constante, g_y. Esto implica que $i = nk_0/q$ debe crecer a esta tasa también. Por consiguiente, k_0 debe crecer a la tasa $g_y + g_q$. Está claro que para tener un crecimiento equilibrado, todos los k_t deberían crecer a la misma tasa. Por consecuencia, k_t crecerá a la tasa $g_y + g_q$. Es fácil deducir a partir de la ecuación (13) que la tasa de crecimiento de la producción será obtenida por $g = (1/y)(dy/dt) = [(1/1 - \alpha)g_z] + [\alpha/1 - \alpha)g_q]$. Esta formula tiene forma idéntica a la ecuación (9). (Para ver esto, pongamos $\alpha_s = 0$ y $\alpha_e = \alpha$ en la ecuación (9)).

11 A partir de la nota 10, se desprende que a lo largo de la trayectoria de crecimiento equilibrado, $k_0(t)$ debe crecer a tasa $g_y + g_q$, donde g_y es la tasa de crecimiento de la producción y g_q es la tasa de crecimiento de q. Es fácil comprobar que $g_y + g_q = g_q/(1 - \alpha) \equiv \kappa$.

una nueva planta en la fecha t son iguales a $k_0(t) = e^{\kappa t}$. Una planta construida en la fecha t, incorpora $e^{\kappa t} = (eg_q t)^{1/(1-\beta)}$ unidades de eficiencia de capital. Por lo tanto, el coste en consumo de construir una nueva planta en la fecha t es

$$\frac{e^{\kappa \tau}}{q(t)} = e^{(k-g_q)t} = (eg_q t)^{a/(1-\alpha)} \tag{14}$$

Por lo tanto, el ratio de capital físico entre una nueva planta y una planta que tiene una edad de τ períodos vendrá dado por $k_0/k_\tau = e^{(\kappa+\delta)\tau}$, donde δ es la tasa de depreciación física del capital. Junto a la ecuación (11), esto implica que $\lim_{\tau\to\infty} y_\tau/y_0 = 0$, por lo que, en relación a las nuevas plantas, las anteriores se extinguirán a lo largo del tiempo. En lo que sigue, se fija $\delta = 0$.

4.2. Efectos del aprendizaje

Al irrumpir una nueva tecnología, las destrezas establecidas a menudo se destruyen y la productividad puede caer temporalmente. En sus primeras fases, además, una nueva tecnología puede ser operada ineficazmente por falta de experiencia.

Evidencia sobre los efectos de aprendizaje. Una gran cantidad de evidencia confirma la presencia de tales efectos de aprendizaje.

1. Un interesante caso de estudio, emprendido por David (1975), es la planta de algodón número 2 de Lawrence. Esta planta estaba en funcionamiento en el período de preguerra en los Estados Unidos, y algunos documentos detallados del inventario muestran que entre 1836 y 1856 no fue incorporado ningún nuevo equipamiento. A pesar de esto, la producción por hora creció a un 2,3 por 100 por año durante este tiempo. Jovanovic y Nyarko (1995) presentan varias curvas de aprendizaje para actividades que van desde la cirugía angioplastica hasta los acabados de acero; véase Argotte y Epple (1990) para una recopilación de casos de estudio sobre curvas de aprendizaje.
2. Tras analizar 2.000 empresas de las 41 industrias que abarcan el período 1973-86, Bahk y Gort (1993) encontraron que la productividad de una planta aumenta un 15 por 100 durante los primeros 40 años de vida debido a los efectos del aprendizaje.

La curva de aprendizaje. Imaginemos ahora una sencilla forma funcional para la curva de aprendizaje. Supongamos que como función de la edad, τ, la PTF $z_\tau(t)$ en un cierto momento t no depende de t en sí mismo, sino solamente de τ, como sigue:

$$z_\tau = (1 - z^* e^{-\lambda\tau})^{1-\beta}$$

De este modo, con el paso del tiempo la maquinaria se hace más productiva, debido (por ejemplo) a *learning by doing,* a aprender haciendo. Obsérvese que $z_0 = (1 - z^*)^{1-\beta}$, de modo que $1 - (1 - z^*)^{1-\beta}$ es la 'cantidad que puede ser aprendida'. Por otra parte, z_τ está acotado por arriba a la unidad, de forma que sólo se puede llegar hasta ahí con cualquier tecnología en particular. En épocas de rápido progreso tecnológico es probable que se tengan curvas de aprendizaje más empinadas. Es decir, z^* es probable que esté positivamente relacionada con la tasa de progreso técnico específico a la inversión, g_q. Cuanto mayor es g_q, más distintas serán las últimas generaciones de bienes de capital, y mayor será lo que debe ser aprendido. Por consiguiente, suponemos que

$$z^* = \omega g_q^{\nu} \tag{15}$$

En lo que sigue, suponemos que $\beta = 0{,}70$, $\lambda = 1{,}2$, $\omega = 0{,}3$, $\nu = 12$. Con esta elección de valores de los parámetros, la curva de aprendizaje muestra una tasa de aprendizaje razonablemente rápida en la que el potencial completo de una planta se alcanza en unos 15 años (cuando g_q toma su valor del período de posguerra 0,04).

4.3. Retardos en la difusión

Evidencia. La difusión se refiere a la expansión de una nueva tecnología a través de la economía. La difusión de innovaciones es lenta, pero su ritmo parece incrementarse con el paso del tiempo. En un estudio ya clásico, Gort y Klepper (1982) examinaron un total de 46 innovaciones de producto, empezando con discos de vinilo en 1887 y terminando con el láser en 1960. Los autores caracterizaron la difusión examinando el número de empresas que producían el nuevo producto a lo largo del tiempo. Por término medio, sólo dos o tres empresas producían cada nuevo producto en los primeros 14 años después de su desarrollo comercial; después, el número de empresas aumentaba bruscamente (un promedio de seis firmas por año durante los siguientes diez años). Los precios caían rápidamente como consecuencia de la entrada de un nuevo producto (13 por 100 por año durante los primeros 24 años). Utilizando un subconjunto de 21 productos de los datos de Gort y Klepper, Jovanovic y Lach (1997) muestran que la producción de un nuevo producto tarda unos 15 años en pasar del 10 al 90 por 100 en su nivel de difusión. También citan evidencia acerca de un estudio sobre 265 innovaciones según la cual una nueva innovación tarda 41 años de media en pasar del 10 al 90 por 100 en su nivel de difusión. Grübler (1991) presenta también evidencia acerca de la velocidad de expansión de estos productos después de ser inventados. Por ejemplo, la locomotora de vapor tardó en Estados Unidos 54 años en pasar del 10 al 90 por 100 en su nivel de difusión, mientras que a la locomotora diesel (una pequeña innovación) le llevó 12 años. Se tardaron aproximadamente 25 años desde que se introdujo la primera locomotora diesel en 1925 hasta que la mitad de las locomotoras en uso fueron diesel, lo cual ocurrió entre 1951 y 1952.

Teorías de los retardos en la difusión. Los retardos en la difusión tienen orígenes diferentes:

1. *Capital físico específico a la generación de capital*. Si, en un modelo de generaciones de capital, una empresa puede usar solo una tecnología a la vez, como en Parente (1994), se enfrenta entonces a un problema de sustitución. El nuevo equipamiento es costoso, mientras que el anterior, de inferior calidad, ha sido pagado. De ahí que es óptimo esperar un poco antes de reemplazar una vieja máquina por una nueva y mejor[12]. Además, no todo el mundo puede cambiar al mismo tiempo porque la capacidad de la economía para producir equipos es finita. Esto implica una cierta parsimonia en la adopción y una curva de difusión suave.
2. *Capital humano específico por generaciones*. El lento aprendizaje de las nuevas tecnologías hace que la adopción sea costosa y que se ralentice, un hecho que Parente (1994) y Greenwood y Yorukoglu (1997) enfatizan. La adopción de una nueva tecnología puede también retrasarse a causa de la dificultad, en un primer momento, de contratar gente experimentada que sepa trabajar con ella, como destacan Chari y Hopenhayn (1991).
3. *Ventajas de la 'segunda adopción'*. Si, como Arrow (1962) supone, la experiencia de los que primero adoptan sirve de ayuda a los que adoptan más tarde, las empresas tienen un incentivo para posponer la adopción, y adoptar en masa una nueva tecnología no es un equilibrio para las empresas; algunas la adoptarán enseguida, y otras elegirán esperar, como en los modelos de Jovanovic y Lach (1989) y Kapur (1993).
4. *Falta de conocimiento*. Una empresa puede no estar al corriente de alguno o de todos los siguientes supuestos: (a) que la nueva tecnología existe, (b) que es apropiada, o (c) dónde adquirir todos los bienes complementarios. Los retardos en la difusión surgen a causa de los costes de investigación, como afirman Jovanovic y Rob (1989) y Jovanovic y MacDonald (1994)[13].

[12] Por ejemplo, DAVID (1991) atribuye en parte la lenta adopción de la electricidad en las fábricas durante principios de 1900 a la durabilidad de las viejas maquinarias que funcionaban con energía mecánica derivada del agua y del vapor. Aquellas industrias que experimentaron una rápida expansión y de ahí una rápida inversión *neta* –tabaco, fabricados de metal, transportes y equipamiento– tendieron a adoptar la electricidad antes que el resto.

[13] La difusión de la tecnología se ha acelerado de forma continua durante el último siglo (Federal Reserve Bank of Dallas, 1997, documento D). Los modelos teóricos de búsqueda que analizan el avance tecnológico, atribuyen naturalmente esta tendencia a la mejora secular en la velocidad y en la calidad de la comunicación.

5. *Otras diferencias entre las empresas al adoptar*. Los cuatro puntos anteriores dan a las empresas una razón para esperar. El tiempo óptimo de espera de las empresas para adoptar es diferente por la simple razón que las empresas «son diferentes». Por ejemplo, la difusión del maíz híbrido se vio afectada por factores económicos como la rentabilidad del maíz (relativa a otros bienes de la agricultura) en el área en cuestión, y la educación de los agricultores que vivían allí (Griliches, 1957; Mansfield, 1963; Romeo, 1975).

Determinación del número de plantas entrantes, $n_0(t)$. Para obtener una determinada cantidad de plantas de cualquier generación, se debe abandonar el supuesto de rendimientos a escala constantes. Suponemos que los rendimientos a escala son decrecientes, de modo que $\alpha + \beta < 1$. Los beneficios de explotar una planta de edad τ en el período actual vendrán dados por

$$\pi_\tau \equiv \max_{\tau} \, [z_\tau k_\tau^\alpha l_\tau^\beta - w l_\tau] = (1 - \beta) \left[\left(\frac{\beta}{w} \right)^\beta z_\tau k_\tau^\alpha \right]^{1/(1-\beta)}$$

El valor presente del flujo de beneficios de poner en funcionamiento una nueva planta en el período actual, t, será

$$\int_0^\infty \pi_\tau(t + \tau) e^{-r\tau} d\tau - \frac{k_0(t)}{q(t)} - \phi(t)$$

donde r indica la tasa real de interés. A partir de la ecuación (14), $k_0(t)/q(t) = e^{[\alpha/(1-\alpha)]g_q t}$ es el precio de compra del nuevo capital instalado, y $\phi(t) = \phi_0 e^{[\alpha/(1-\alpha)]g_q t}$ es el coste fijo de entrada. Si hay libre entrada en la producción, estas rentas deben hacerse cero de modo que

$$\int_0^\infty \pi_\tau(t + \tau) e^{-r\tau} d\tau - \frac{k_0(t)}{q(t)} - \phi(t) = 0 \qquad (16)$$

Esta ecuación determina el número de nuevos participantes $n_0(t)$ en el período t. Aunque $n_0(t)$ no aparezca directamente en esta ecuación, afecta a los beneficios porque a través de la ecuación (12) afecta a los salarios.

Elección de valores para α *y* β. En el análisis a continuación, la participación de las rentas del trabajo en la renta se supone que alcanza el 70 por 100, de modo que $\beta = 0{,}70$. A partir de las cuentas nacionales no es posible saber cómo debería dividirse el resto de la renta entre los beneficios y los rendimientos del capital. Suponiendo que la participación de las rentas del capital es del 20 por 100, lo que implica que $\alpha = 0{,}20$, de forma que la parte restante ascenderá al 10 por 100 del ingreso. El tipo de interés real, r, se supone igual al 6 por 100.

Una curva de difusión paramétrica. En lo que sigue, simplemente se considera un resultado particular de la curva de difusión para nuevas invenciones, como en Jovanovic y Lach (1997). Consideramos un cambio en el paradigma tecnológico de la economía que implica el paso de una trayectoria de crecimiento equilibrado, con algún flujo constante de participantes n^*, hacia otra trayectoria de crecimiento equilibrado, con un flujo constante de participantes n^{**}. Estos flujos de participantes deberían determinarse de acuerdo con la ecuación (16). Durante la trayectoria de transición habrá cada período algún flujo de nuevos entrantes. Suponemos que el número de plantas que adoptan el nuevo paradigma sigue una curva típica de difusión en forma de S.

Específicamente,

$$\frac{\int_0^{\infty} n_0(s)\, ds}{tn^{**}} = \frac{1}{1 + e^{(\Delta - et)}}$$

El parámetro Δ controla el número inicial de usuarios, o $n_0(0)$ mientras que ε gobierna la velocidad de adopción. Asumimos que $\Delta = 3{,}5$ y $\varepsilon = 0{,}15$. Con esta elección de valores de parámetros, lleva aproximadamente unos 25 años alcanzar el 50 por 100 del nivel de difusión, o el punto en el que alrededor de un 50 por 100 de los usuarios potenciales (medido por tn^{**}) han adoptado la nueva tecnología.

Efectos desbordamiento en el Aprendizaje de una Tecnología

Imaginemos que un nuevo paradigma tecnológico (por ejemplo, la tecnología de la información) es introducido por primera vez en la fecha $t = 0$. Siguen llegando mejores tecnologías de la información, pero todas encajan en el nuevo paradigma, por lo que según se adopta un nuevo nivel, la economía adquiere conocimientos sobre el paradigma completo. Para alguien que adopta un nivel tecnológico particular a partir de este nuevo paradigma, la facilidad de aprender en este nivel tecnológico particular puede tener que ver con el número acumulado de usuarios del paradigma mismo. Cuantos más usuarios, se adquiere más fácilmente la habilidad de utilizar un nuevo grado tecnológico de forma eficiente. En particular, supongamos que el punto de partida de la curva de difusión de un grado tecnológico particular dentro del nuevo paradigma depende positivamente del número de plantas que han adoptado una tecnología del nuevo paradigma. El número de plantas que han adoptado es una función creciente del tiempo. De ahí que se modifica la ecuación (15) para dar

$$z^* = \omega g_q^{\nu} + \chi \left[1 - \frac{1}{1 + e^{(\Delta - \varepsilon t)}} \right]^{\sigma}$$

donde χ y σ son constantes. Obsérvese que z^* (una medida de la cantidad a aprender por uno mismo) es decreciente con t (el tiempo transcurrido desde la primera utilización del nuevo paradigma en cuestión). Cuando $t \to \infty$, el término que recoge el *spillover,* los efectos desbordamiento, desaparece. La importancia con la que opera este término es creciente en χ y decreciente en σ. En el análisis a continuación se supone que $\chi = 0{,}4$ y $\sigma = 0{,}02$.

4.4. Un ejemplo: la Tercera Revolución Industrial

Ahora, supongamos partir de de una trayectoria de crecimiento equilibrado donde la tasa de progreso técnico específico a la inversión es g_q^*. De repente –en un punto en el tiempo que será normalizado a $t = 0$– aparece un nuevo paradigma tecnológico con una tasa mayor de progreso técnico específico a la inversión g_q^{**}. A causa del efecto g_q en el aprendizaje, como se especifica en la ecuación (15), las curvas de aprendizaje se hacen más empinadas una vez que la nueva era tecnológica comienza.

Quizás la primera trayectoria de crecimiento equilibrado podría ser vista como la trayectoria asociada con la segunda revolución industrial. Este período fue testigo del surgimiento de la electricidad, del motor de combustión interna y de la industria química moderna. El segundo acontecimiento podría ser el nacimiento de la era de la información, o la tercera revolución industrial. ¿Cómo será la trayectoria de la transición económica? ¿En qué depende esta trayectoria de transición económica del aprendizaje y de la difusión?

Para este experimento fijamos $g_q^* = 0{,}335$ y $\vartheta_q^{**} = 0{,}05$. La Figura 3 representa la productividad del trabajo para la economía bajo estudio. La línea recta representa lo que le habría sucedido a la productividad si la tecnología de la información no hubiera sido inventada. El resultado relevante es cómo el crecimiento en la productividad del trabajo se detiene durante el nacimiento de la edad información. Conviene llamar la atención sobre que la productividad tarda unos 30 años en cruzar su antiguo nivel.

La importancia del aprendizaje se pone de manifiesto en la Figura 4, que traza la trayectoria de transición cuando no hay efectos de aprendizaje. En este caso, la productividad tarda diez años menos en traspasar su vieja trayectoria. Por último, la Figura 5 cierra la curva de difusión. Sigue habiendo un descenso de la productividad debido a los efectos del aprendizaje, pero es mucho más débil. Los efectos de aprendizaje en el modelo se amortiguan por dos razones. En primer lugar, porque no son necesarios recursos para el aprendizaje. Si el aprendizaje necesitara la aportación del trabajo, *inputs* intermedios, o capital, el efecto se vería fortalecido. En segundo lugar, en el modelo, el trabajo puede ser libremente asignado a las distintas cosechas de capital. Por consiguiente, se destina menos trabajo a las maquinarias de baja productividad (tales como, nuevas maquinarias que entran en funcionamiento), lo cual aminora el descenso de la productividad. Si cada equipo necesitara una cantidad mínima de trabajo para funcionar –otra condición que quebraría la agregación de Solow (1960)– los efectos del aprendizaje serían más fuertes. Finalmente, una razón fundamental para las curvas de difusión lenta son los altos costes de aprendizaje, pero este tipo de efecto no ha sido tratado aquí. Es probable que el aprendizaje y la difusión estén inextricablemente vinculados y que, por lo tanto, sean difíciles de separar, excepto de forma artificial, como lo hemos hecho aquí.

FIGURA 3
DINÁMICA DE TRANSICIÓN

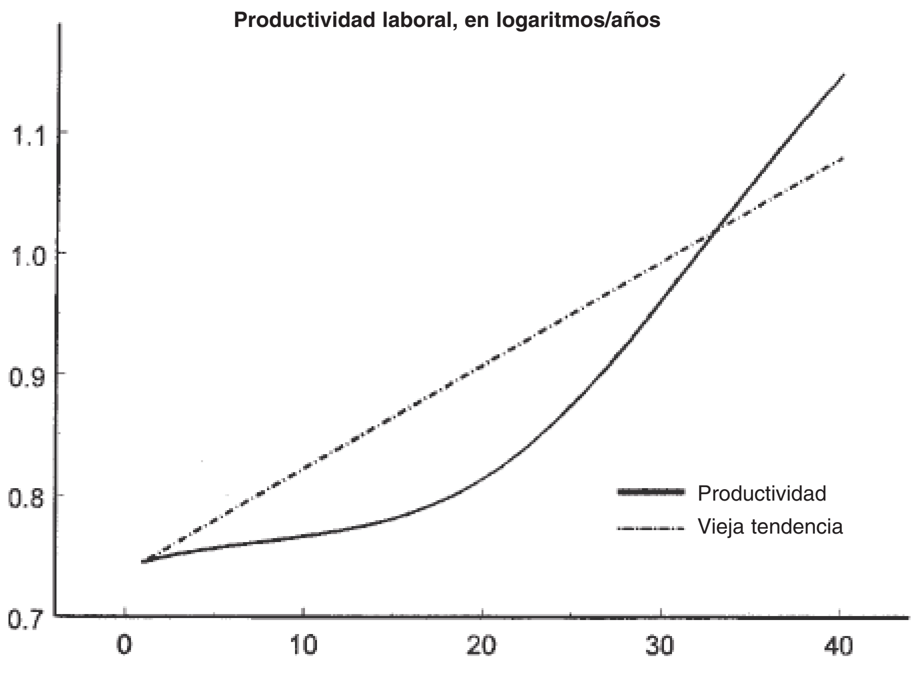


FIGURA 4
DINÁMICA DE TRANSICIÓN (SIN APRENDIZAJE)

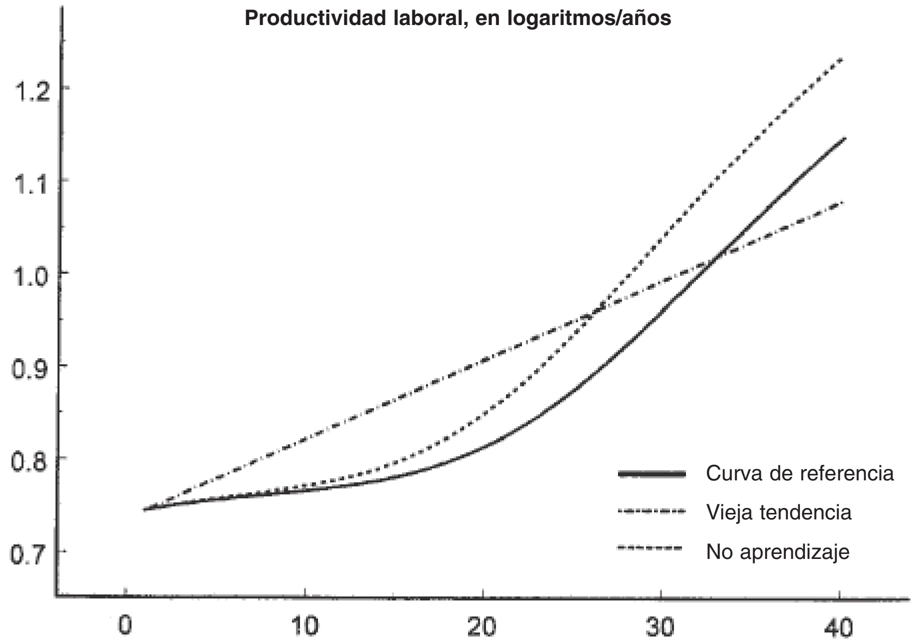
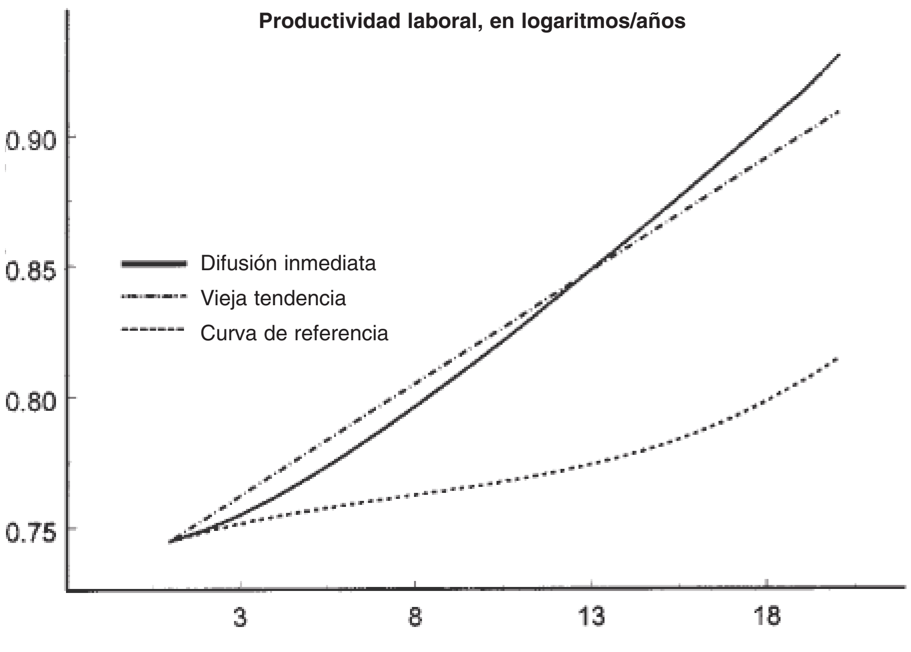


FIGURA 5
DINÁMICA DE TRANSICIÓN (DIFUSIÓN INMEDIATA)



En realidad, estos gráficos dejan claro que el modelo de generaciones de capital puede explicar el descenso de la productividad si los retardos en el aprendizaje y en la difusión son suficientemente importantes, y la evidencia presentada aquí indica que lo son. Otra característica atractiva de este modelo es que también puede explicar el aumento simultáneo en las primas a la destreza, y este es el tema del siguiente apartado.

5. Desigualdad Salarial

Así como la productividad laboral creció más despacio a principios de los años 70, la desigualdad salarial se elevó dramáticamente. La evidencia reciente sugiere que este aumento de la desigualdad salarial puede haber sido provocado por la introducción de nuevos bienes de capital.

Por ejemplo:

1. La era de la electricidad en la industria nació hacia 1900. Goldin y Katz (1998) muestran que las industrias que usaron electricidad tendían a favorecer el uso de trabajo especializado.
2. Autor, Katz y Krueger (1998) encuentran que la proliferación de los ordenadores puede explicar el crecimiento del 30 al 50 por 100 en la demanda de trabajadores especializados desde los años 1970.
3. Utilizando datos de distintos países Flug y Hercowitz (2000) descubren que el aumento de la inversión en equipo conduce a un aumento tanto de la demanda de trabajo especializado como de las primas a la destreza. Siguiendo el mismo argumento, Caselli (1999) documenta, a partir de una muestra de industrias fabriles norteamericanas, que desde 1975 ha habido una correlación fuerte y positiva entre los cambios en el ratio capital-trabajo en una industria y los cambios en sus salarios.

Hay dos tipos de teorías sobre cómo la cualificación interactúa con la nueva tecnología. El primer tipo de teoría enfatiza el papel de la especialización en el *uso* de los bienes de capital que incorporan la tecnología. Aquí se está suponiendo que la tecnología está incorporada a los bienes de capital. Esto es lo que se conoce como la hipótesis de la complementariedad entre capital y cualificación, *capital-skill complementarity*. La segunda hipótesis destaca el papel de la cualificación para implementar la nueva tecnología, y esta se denomina destreza en la adopción, *skill in adoption*.

5.1. Griliches (1969) y la Complementariedad entre Capital y Destreza

La hipótesis en su forma original. En su forma original, la hipótesis encaja a la perfección con una pequeña modificación de Solow (1956, 1957) que tiene en cuenta dos tipos de mano de obra en vez de uno. Imaginemos que, como propone Griliches (1969), en la producción, el capital es más complementario con la mano de obra cualificada que con la mano de obra no cualificada. Más en concreto, imaginemos una función de producción agregada de la forma

$$y = [\theta k^{\rho} + (1 - \theta)s^{\rho}]^{\alpha/\rho}\boldsymbol{u}^{(1-\alpha)}$$

donde s y u representan las aportaciones de mano de obra cualificada y no cualificada, respectivamente. Capital y destreza son complementarios, en el sentido que la elasticidad de sustitución entre ellos es menor que la unidad si $\rho < 0$. La prima a la destreza, o la relación entre las tasas de salarios cualificados y no cualificados, es precisamente la relación entre los productos marginales de los dos tipos de mano de obra:

$$\frac{\frac{\partial y}{\partial s}}{\frac{\partial y}{\partial u}} = \frac{\alpha(1-\theta)}{1-\alpha}\left[\theta\left(\frac{k}{s}\right)^{\rho} + (1-\theta)\right]^{-1}\left(\frac{u}{s}\right)$$

Ahora, supongamos que las dotaciones de mano de obra cualificada y no cualificada son fijas. Por consiguiente, la prima a la destreza se elevará siempre que el stock de capital aumente, y así lo hará también la participación de las de las rentas del trabajo en la renta[14]. Krusell *et al.* (2000) sostienen que una función de producción agregada de este tipo se ajusta a la experiencia de posguerra, a condición de que k sea calculado como en el modelo de generaciones de capital de referencia del apartado 6.3: $k(t) = \int_0^{\infty} e^{\delta s} q(t-s)i(t-s)ds.$

Cambios en la estructura de la producción. En la formulación de Griliches, la prima a la destreza sólo depende de las aportaciones de los factores k, s y u. Sin embargo, la prima cambiará también si la adopción de una nueva tecnología está asociada a un cambio en la estructura de producción de la economía. Esta es la dirección que toman Goldin y Katz (1998) y Heckman, Lochner y Taber (1998). Por ejemplo, imaginemos que la función de producción agregada es

$$y = [\theta u^{\rho} + (1-\theta)s^{\rho}]^{\alpha/\rho}\,k^{(1-\alpha)} \tag{17}$$

Un cambio en k no afectará a la prima a la destreza, $(\partial y/\partial s)/(\partial y/\partial u)$, si todo lo demás permanece constante. Pero imaginemos que entra en juego una nueva tecnología, digamos ordenadores o electricidad, que favorece la mano de obra cualifica-

[14] La participación de las rentas del trabajo no cualificado permanece constante, mientras que la participación de las rentas del trabajo cualificado aumenta.

da respecto a la no cualificada. Heckman, Lochner y Taber (1998) desarrollan esta idea suponiendo que la función de producción cambia de tal forma que θ tiende a la baja[15]. Esto eleva la prima a la destreza. Obsérvese que la ecuación (17) es una función de producción *agregada*. Por lo tanto, una disminución en θ afecta igualmente al capital nuevo y al viejo, y la inversión en nuevo capital *no* es necesaria para llevar a cabo el progreso tecnológico.

Una estructura de producción que cambia hacia mano de obra cualificada puede fácilmente extenderse al caso en el que la inversión en nuevo capital *se requiere* para implementar las nuevas tecnologías. Supongamos, como hace Solow (1960), que el progreso técnico sólo aplica a los nuevos bienes de capital, y escribimos

$$y_\nu = A_\nu[\theta_\nu u_\nu^\rho + (1 - \theta_\nu)s_\nu^\rho]^{\alpha/\rho}k_\nu^{1-\alpha}$$

donde y_ν, u_ν, s_ν y k_ν son el producto y los inputs de la tecnología de la generación «ν», y θ_ν es un parámetro de la producción que es específico de esta tecnología. Las tecnologías de las generaciones más nuevas son mejores, y de este modo A_ν es creciente en ν. En cada fecha, habrá, en general, un rango de ν's en uso, especialmente si hay alguna irreversibilidad en el fondo del capital. Suponemos ahora que θ_ν es decreciente en ν. Esto es, mejores tecnologías necesitan menos mano de obra no cualificada. La adopción de tales tecnologías elevará la prima a la destreza. En este tipo de modelo, la prima a la destreza aumenta por la adopción tecnológica y no directamente a causa de un aumento en el fondo del capital.

Caselli (1997) sugiere en cambio, que cada nueva tecnología requiere su propio tipo de destreza, que puede ser más fácil o más difícil de adquirir, relativa a la destreza requerida por tecnologías anteriores. Si las destrezas asociadas a una nueva tecnología son relativamente difíciles de aprender y si las habilidades de las personas para aprender difieren, una revolución tecnológica puede aumentar la desigualdad de ingresos recompensando a aquellos que poseen la capacidad de trabajar con la nueva tecnología.

Combinando Trabajadores y Máquinas

Proporciones fijas entre trabajadores y máquinas. Los argumentos previos suponen que los trabajadores difieren en la destreza, o en su habilidad para adquirirla. Una consecuencia básica del modelo de generaciones de capital es que una serie de cosechas de máquinas de distintas edades estarán en funcionamiento en cada momento del tiempo. ¿Se puede de algún modo convertir esta consecuencia en una proposición acerca de que los trabajadores serán también diferentes? Si un tra-

[15] Ellos estiman que $[(1 - \theta)/\theta]$ ha crecido a una tasa del 3,6 por 100 desde los años 70. Esto da la magnitud correcta del aumento del intervalo salarial en las enseñanzas secundaria y superior.

bajador pudiera manejar un continuo de tecnologías y trabajar con cantidades infinitésimales de cada continuo de máquinas de diferentes generaciones, la respuesta sería *no*, porque cada trabajador podría manejar la «cartera de mercado» de máquinas. Sin embargo, tan pronto como se pone un límite finito al número de máquinas que un trabajador puede manejar simultáneamente, el modelo genera la desigualdad de los ingresos de los trabajadores. Para simplificar, suponemos que el trabajador puede manejar sólo una máquina cada vez, o lo que es lo mismo, que cada máquina requiere sólo un trabajador para funcionar. En otras palabras, hay proporciones fijas entre máquinas y trabajadores. Bajo estos supuestos, la desigualdad en la destreza de los trabajadores surgirá a causa de los incentivos diferenciales a las personas para acumular destreza, lo cual se traduce en una distribución de habilidades no degenerada. Lo que sigue es un resumen del argumento:

1. *Función de producción*. Imaginemos que una máquina se combina con un trabajador. El producto de esa combinación viene dado por la función de producción de rendimientos a escala constante $y = F(k, s)$, donde k es el nivel de eficiencia de la máquina, y s es el nivel de habilidad proporcionado por el trabajador. La eficiencia de la máquina y la destreza son complementarios en la medida que $\partial^2 F/\partial k \partial s > 0$.
2. *Desarrollo de la destreza*. Si v es la fracción de tiempo que el trabajador emplea trabajando, y h es el nivel de su capital humano, entonces $s = vh$. Supongamos que el trabajador se puede dedicar a aumentar h como sigue: $dh/dt = \eta(1 - v)h$, donde $1 - v$ es la fracción de su tiempo que el trabajador emplea en aprender.
3. *Crecimiento de la calidad de la máquina*. Las nuevas máquinas, a su vez, también mejoran. En otras palabras, hay un progreso técnico específico a la inversión. Supongamos que cualquiera puede producir una nueva máquina de calidad k de acuerdo con la función de coste lineal homogéneo $C(k, \boldsymbol{k})$, donde $\boldsymbol{k}$ es el promedio de calidad a escala económica de una máquina recién producida.
4. *Crecimiento equilibrado*. Este marco produce una trayectoria de crecimiento equilibrado con algunas características interesantes, como detalla Jovanovic (1998). Primero, se obtienen distribuciones no degeneradas de la eficiencia de las máquinas y la destreza del trabajador. Esto puede cumplirse incluso si todo el mundo fuera idéntico inicialmente. Esto sucede porque la escasez de recursos quiere decir que no es óptimo dar a todos la máquina más reciente. Las distribuciones de capital y destrezas se mueven hacia la derecha con el paso del tiempo. Segundo, ya que $\partial^2 F/\partial k \partial s > 0$, los mejores trabajadores se combinan con las mejores máquinas de acuerdo con una regla de asignación de la forma $s = \phi(k)$, con $\phi' > 0$. Tercero, las economías que crecen más rápidamente deberían tener un mayor rango de calidades de las máquinas y destrezas.

5.2. Nelson y Phelps (1966) y la destreza en la adopción

El subapartado anterior se basaba en la noción de que la mano de obra cualificada es mejor en la *utilización* de una nueva tecnología; la visión alternativa es que la mano de obra cualificada es más eficiente *adoptando* una tecnología y aprendiendo sobre ella. La formulación original de Nelson y Phelps (1966), y sus subsiguientes extensiones como Benhabib y Spiegel (1994), no recurren al modelo de generaciones de capital. Vamos a recurrir a él ahora.

Evidencia sobre los costes de adopción y su interacción con la habilidad

Cuando se adopta una nueva tecnología, la producción tiende a estar por debajo de lo normal mientras que se aprende a utilizar la nueva tecnología. En realidad, la producción caerá a menudo por debajo de la que se obtuvo con la tecnología previa. En otras palabras, la adopción de una nueva tecnología puede conllevar un coste de producción inevitable durante el período de aprendizaje. Es evidente que el uso de mano de obra cualificada facilita el proceso de adopción.

1. Científicos empresariales descubrieron que la apertura de una planta es seguida de un aumento temporal en el uso de ingenieros cuyo trabajo es lograr que el proceso de producción vaya «a buen ritmo» (Adler y Clark 1991).
2. Barel y Lichtenberg (1987) proporcionan evidencia para la hipótesis común que (a) un trabajador instruido tiene ventaja comparativa en la aplicación de nuevas tecnologías, y (b) la demanda de trabajadores instruidos frente a la de menos entrenados desciende cuando se gana experiencia con la nueva tecnología.
3. En un estudio más reciente sobre 450 industrias fabriles norteamericanas desde 1960 a 1990, Caselli (1999) descubrió que cuanto mayor fue la proporción de trabajadores 'no productivos a productivos' antes de 1975 (su medida de intensidad de la destreza inicial), mayor era el aumento en su ratio capital-trabajo en el período de 1975 a 1990 (una medida de la adopción de nuevos bienes de capital).

La configuración del papel de la destreza en la adopción

Para hacer efectiva la idea de que la destreza facilita el proceso de adopción, se supone que

$$y_z = z_\tau k_\tau^\alpha u_\tau^\beta$$

es la función de producción para la tecnología de edad τ, y k_τ y u_τ representan las cantidades de capital y mano de obra no cualificada. Asumimos que la mejora en la actividad de una planta, $dz_\tau/d\tau_\tau$, depende de la cantidad de mano de obra cualificada, s_τ, contratada:

$$\frac{dz_\tau}{d\tau} = \vartheta(1 - z_\tau)s_\tau^\phi - \mu z_\tau$$

Hay una cota superior en el nivel de la productividad que puede ser alcanzado con el capital de cualquier generación en particular. Según disminuye la producción potencial no realizada $(1 - z_\tau)$, aumenta la dificultad de realizar una mejora. La condición inicial para z, o su valor de partida en el momento en el que la planta es operativa, se supone que está inversamente relacionado con la tasa de progreso técnico, g_q, de la manera siguiente:

$$z_0 = \psi g_q^{-\xi}$$

donde ψ y ξ son parámetros positivos.

Tal formulación puede explicar el reciente aumento en la prima a la destreza (*skill premium*); los detalles están en Greenwood y Yorukoglu (1997). Supongamos que en 1974 aumentó la tasa de progreso técnico específico a los bienes de inversión, quizás por el desarrollo de las tecnologías de la información. Esto debería haber conducido a un aumento de la demanda de las destrezas necesarias para poner en marcha las nuevas tecnologías. Por lo tanto, la prima a la destreza se habría elevado, para el resto del entorno permaneciendo invariante.

6. Tres modelos de progreso técnico específico a la inversión endógeno

Es simple endogeneizar el progreso técnico específico a la inversión. ¿Cómo? Tres ilustraciones basadas en tres motores del crecimiento diferentes nos mostrarán cómo conseguirlo:

1. ‘Aprender haciendo’, *Learning by Doing*, según Arrow (1962).
2. Investigación en el sector de bienes de capital ‘a la manera de’ Krusell (1998).
3. Inversión en capital humano en el sector de bienes de capital siguiendo a Parente (1994).

6.1. *Solow (1960) se encuentra con Arrow (1962):* ‘Aprender haciendo’ como Motor de Crecimiento

Arrow (1962) supone que el progreso técnico procede exclusivamente de ‘aprender haciendo’ en el sector de bienes de capital. No hay curvas de aprendizaje ni retardos en la difusión en el sector que produce el bien final. En el sector de bienes de capital, no hay costes directos asociados a la mejora de la eficiencia en la producción. En su lugar, la eficiencia de un productor de bienes de capital depende de la producción agregada acumulada de todo el sector de bienes de capital –o, lo que es lo mismo, de la inversión agregada acumulada por los *usuarios* de los bienes de capital. Como cada productor tiene un efecto insignificante sobre la producción agregada de los bienes de capital, el aprendizaje es exclusivamente externo. Pasamos ahora a la noción de Arrow de 'aprender haciendo' en términos del marco de generaciones de capital de Solow.

Producción de bienes finales y acumulación de capital. La población es constante; escribimos la función de producción agregada de bienes finales en términos per cápita como $c + i = k^{\alpha}$, donde c, i y k son todos valores per cápita, una normalización inocua si los rendimientos a escala son constantes. El capital físico se acumula como sigue:

$$\frac{dk}{dt} = iq - \delta k \tag{18}$$

Una vez más, q es el estado de la tecnología en el sector de bienes de capital. Cualquiera puede obtener q unidades de bienes de capital a partir de una unidad de bien de consumo.

Aprendizaje por parte de los productores de bienes de capital. Si en el instante t, q viene descrito como

$$q(t) = \nu\lambda \left[\int_0^{\infty} q(t-s)i(t-s)ds \right]^{1-\alpha} \tag{19}$$

donde $\boldsymbol{i}(t - s)$ indica el nivel de inversión de la industria en la fecha $t - s$ en unidades de bien de consumo, y $q(t - s)\boldsymbol{i}(t - s)$ es el número de máquinas producida en $t - s$ en unidades de eficiencia. En la ecuación (19), como en el modelo de Arrow, la productividad del sector de bienes de capital depende de la inversión acumulada en la economía[16].

[16] Para simplificar las cosas, se omite el supuesto de ARROW (1962) de que hay proporciones fijas, específicas a cada cosecha de capital, entre máquinas y trabajadores en la producción. Este supuesto puede conducir al desecho del capital antes del final de su vida física. (En su análisis, los bienes de capital afrontan la muerte súbita al final de su vida física, a menos que antes sean desechados, en oposición al supuesto de depreciación gradual que se adopta aquí.) También Arrow supone que la eficiencia de los productores de máquinas es una función isoelástica de la cantidad acumulada de máquinas producidas, mientras que aquí se supone que es una función isoelástica de la cantidad acumulada de unidades de *eficiencia* producidas.

Sea λ la masa de agentes idénticos en esta economía –el «tamaño» o «escala» de la economía–. Entonces, en el equilibrio, $\boldsymbol{i} = \lambda i$, de manera que la ecuación (19) se convierte en

$$q(t) = \nu\lambda^{1-\alpha}\left[\int_0^\infty q(t-s)i(t-s)ds\right]^{1-\alpha} \tag{20}$$

Crecimiento equilibrado endógeno. Suponemos que los gustos de los consumidores son descritos por

$$\int_0^\infty e^{-\rho t}\ln c(t)dt \tag{21}$$

Supongamos que g_x denota la tasa del crecimiento de la variable x en la senda crecimiento equilibrado. La función de producción implica que como la población es constante, $g_y = \alpha g_k$. En la senda de crecimiento equilibrado, la producción del sector de bienes de capital, o $q\lambda i$, crece a la tasa g_k por lo que la ecuación (20) implica que $g_q = (1-\alpha)g_k$. De manera que el precio de los bienes de capital, $1/q$, disminuye cuando la producción aumenta.

LEMA 1. *Si existe una senda de crecimiento equilibrado, g_k satisface la ecuación*

$$\underbrace{\rho + \delta + g_k}_{\text{Tipo de interés}} = \underbrace{\alpha\nu\lambda^{1-\alpha}\left(1 + \frac{\delta}{g_k}\right)^{1-\alpha}}_{q \times MPk} \tag{22}$$

PRUEBA. En primer lugar, a partir de la ecuación (18), $g_k = -\delta + qi/k$. Puesto que g_k, y por tanto qi/k, debe ser constante, $g_k = g_q + g_i = g_q + g_y$, donde la segunda igualdad resulta de asumir que el consumo y la inversión son fracciones constantes de la renta a lo largo de la senda de crecimiento equilibrado, por lo que $g_i = g_c = g_y$. En segundo lugar, consideramos la condición de primer orden de optimalidad para k. Renunciar a una unidad de consumo permite comprar q unidades de capital que pueden alquilarse por $\alpha k^{\alpha-1}q$. Esta cantidad tiene que cubrir los intereses, $r + g_y$, el coste de la depreciación, δ, y las pérdidas de capital g_q, porque los precios de los bienes de capital están cayendo. Esto da la condición de eficiencia $\alpha k^{\alpha-1} = (\rho + \delta + g_y + g_q)/q = (\rho + \delta + g_k)/q$. En tercer lugar, en la senda de crecimiento equilibrado, $q(t-s)i(t-s) = e^{-(gq+gi)s}q(t)i(t) = e^{-gks}q(t)i(t)$. Por tanto, utilizando la ecuación (20), $q = \nu\lambda^{1-\alpha}(qi/g_k)^{1-\alpha}$, lo cual da $qk^{\alpha-1} = \nu\lambda^{1-\alpha}[(qi/k)/g_k)]^{1-\alpha}$. Sustituyendo el hecho de que $g_k = -\delta + (qi/k)$ en esta expresión da $qk^{\alpha-1} = \nu\lambda^{1-\alpha}[(g_k + \delta)/g_k)]^{1-\alpha} = \nu\lambda^{1-\alpha}(1 + \delta/g_k)^{1-\alpha}$. Recordar entonces que $\alpha qk^{\alpha-1} = (\rho + \delta + g_y)$ da la ecuación (22). C.Q.D.

COROLARIO 2. *Existe una solución única, y positiva, para la ecuación (22).*

PRUEBA. El lado izquierdo de la ecuación (22) es creciente en g_k, con ordenada en el origen $\rho + \delta$. El lado derecho es decreciente, tendiendo a infinito cuando g_k tiende a cero, y tendiendo a $\alpha\nu\lambda^{1-\alpha}$ cuando g_k tiende a infinito. Por lo tanto, existe exactamente una solución y es estrictamente positiva. C.Q.D.

PROPOSICIÓN 3. *Efecto de escala: Una economía más grande, lo que viene medido por λ, crece más rápidamente.*

PRUEBA. Todo lo que aumenta (reduce) el lado derecho de la ecuación (22) aumenta (reduce) g_k. Lo que aumenta (reduce) el lado izquierdo de la ecuación (22) reduce (aumenta) g_k[17]. C.Q.D.

Ejemplo 1. Sea la participación del capital en la renta el 30 por 100, la tasa de preferencia temporal el 4 por 100, y la tasa de depreciación el 10 por 100. Por tanto, $\alpha = 0{,}3$, $\rho = 0{,}04$ y $\delta = 0{,}10$. Ahora, recuperamos valores para los parámetros ν y λ que implican la existencia de un equilibrio en el que los precios de los bienes de capital caen un 4 por 100 por año; esto es, un equilibrio con $g_q = 0{,}04$. Esto conduce a que el stock de capital crece a la tasa $g_q = 0{,}04/(1 - 0{,}3) = 0{,}057$. Para conseguir este valor de g_k y poder resolver la ecuación (22), se debe dar que ν y λ son tales como $\nu\lambda^{1-\alpha} = 0{,}32$.

Aplicando el modelo a las tecnologías de la información. El ritmo de progreso técnico en las tecnologías de la información ha sido casi increíble. Consideremos el coste de procesar, almacenar y transmitir la información. Jonscher (1994) calcula que entre 1950 y 1980 el coste de un MIP (Millones de Instrucciones Por segundo) cayó a una tasa de entre 27 y 50 por 100 por año. Asimismo, el coste de almacenar la información descendió a una tasa de entre el 25 y 30 por 100 por año entre 1960 y 1985. Por último, el coste de la transmisión de información cayó a una tasa de entre 15 y 20 por 100 por año durante el período de 1974 y 1994.

¿Cuál es el porqué de esta precipitada caída en el coste de las tecnologías de la información? El modelo de Arrow da una respuesta precisa. Las tecnologías de la información son una tecnología de uso general, *general purpose technology*, que puede ser usada en muchas industrias. La escala de la demanda de bienes de capital que la incorporan, y por lo tanto la producción acumulada de estos bienes de capital, ha sido grande, y esto puede haber conducido a un ritmo más rápido de aprendizaje y de reducción de costes.

[17] Resulta inmediatamente que g_k es creciente con ν y decreciente con ρ.

Una tecnología más especializada como, por ejemplo, una maquinaria nueva para la minería del carbón, sería específica para un sector (la minería del carbón) y, como resultado, sería demandada a una menor escala. Su inversión y su producción acumulada serían menores, y también lo serían las ganancias de productividad inducidas por el aprendizaje. En términos del modelo, el valor de λ para las tecnologías de la información excede el valor de λ para la maquinaria de la minería del carbón. Esto equivale a un efecto de escala en el crecimiento. Un mayor λ acelera el descenso de los precios de los bienes de capital, un hecho que demuestra la proposición (3).

6.2. *Solow (1960) se encuentra con Krusell (1997):* La investigación como Motor de Crecimiento

En el modelo de Krusell, el perfeccionamiento de los bienes de capital tiene lugar gracias a la investigación.

Productores de bienes finales. La función de producción de los bienes finales, y, es

$$y = l^{1-\alpha} \int_0^l k_j^{\alpha} dj \tag{23}$$

donde l es la cantidad de trabajo empleado en el sector de producción (o consumo) del bien final, y k_j es la cantidad de capital de tipo j empleado. El sector de bien de consumo es competitivo y alquila su capital cada período a los productores de bienes de capital.

Acumulación de capital. Cada tipo de capital, j, es producido y es propiedad de un monopolista que alquila su stock de máquinas, k_j, período a período, a los que las emplean en el sector de bienes de consumo. El progreso técnico se produce en el margen intensivo; k_j crece de esta manera:

$$\frac{dk_j}{dt} = -\,\delta k_j + q_j x_j \tag{24}$$

donde x_j es el gasto por productor j de bienes de capital, medido en unidades de consumo, y q_j representa el número de máquinas de tipo j que una unidad de bienes de consumo puede producir. En otras palabras, q_j es la eficiencia de producción del monopolista j.

Investigación por productor de bienes de capital. El productor j de bienes de capital puede elevar q_j por medio de la investigación. Debido a que el margen que el productor cobra es proporcional a q_j, él o ella tienen el aliciente de investigar para elevar q_j. Si el productor alquila h_j trabajadores para investigar, luego el monopolista j puede elevar la eficiencia de él o de ella de esta manera:

$$\frac{dq_j}{dt} = q_j^{\gamma} q_R^{1-\gamma}(h_j) \tag{25}$$

cuando $R(\cdot)$ es una función creciente y cóncava. El término $q = \int_0^l q_j dj$ es el nivel medio de productividad de todos los sectores, y γ es un índice del rendimiento I+D específico del producto. Este término incentiva a hacer investigación (si $\gamma = 0$, no habría incentivos), pero no afecta al procedimiento de la contabilidad del crecimiento mientras que h_j se preste a la medición.

Equilibrio simétrico. Consideremos una trayectoria de crecimiento equilibrado donde cada monopolista es una copia del otro, de modo que $k_j = k(t)$, $q_j = q(t)$ y $h_j = h(t)$, etc. Las primeras tres ecuaciones se convierten en

$$y = l^{1-\alpha}k^{\alpha} \tag{26}$$

$$\frac{dk}{dt} = -\,\delta k + qx \tag{27}$$

y

$$\left(\frac{1}{q}\right)\left(\frac{dq}{dt}\right) = R(h) \tag{28}$$

Luego el fondo de capital puede representarse como

$$k(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)}q(s)x(s)ds \tag{29}$$

La ecuación (27) es de la misma forma que la ecuación (4) de la sección 4, y la evolución de q tiene ahora una interpretación específica: el progreso técnico específico a la inversión es el resultado de la investigación. Note que a partir de la ecuación (27) toda nueva inversión, $x(t)$, se sitúa en la tecnología de frontera en el sentido de que incorpora $q(t)$ unidades de eficiencia de posibilidades de producción por unidad de consumo a la que se renuncia.

Dificultades con los modelos basados en la investigación. Aunque recoge las características que el apartado 2 describe como esenciales para entender la experiencia de desarrollo de EE.UU, en el modelo de Krusell hay tres problemas.

1. *Un incremento secular predecible en la tasa de crecimiento*. La ecuación (28) implica que el ritmo de expansión en los Estados Unidos debería haberse incrementado con el paso del tiempo porque en los datos estadounidenses y de otras muchas economías, h ha tendido a aumentar. Jones (1995) discute la incongruencia de estas implicaciones de los modelos basados en la investigación presentando evidencia al respecto.
2. *Un efecto de escala positivo*. Para ver el efecto de escala positivo considere dos economías idénticas y fúndalas en una sencilla que tenga el doble de trabajo y capital de lo que cada una de estas mismas economías tenía originariamente. Ahora, mantenga los tipos de productores de capital constante, ya que añadir nuevos tipos equivale a inventar nuevos bienes de capital. Si cada agente se comporta como se ha descrito anteriormente, entonces inicialmente $y = 2l^{1-\alpha}k^{\alpha}$. Además, cada empresa podría ahora emplear tanto como el doble de trabajadores en investigación, por lo que q y k crecerían más rápido. Alternativamente, en este experimento hipotético se podría asumir que la economía fundida no debería tener un monopolio, sino un duopolio, en cada mercado de máquinas. No obstante, las consecuencias de tal supuesto no son del todo claras, porque la anterior asignación de trabajo a la investigación no sería una asignación de equilibrio en la nueva economía. La competencia en el mercado de máquinas debería conducir a inferiores beneficios para los productores de las máquinas, lo cual reduciría sus incentivos a investigar y a crecer. Esto debería en parte compensar, e incluso revertir, el efecto de escala positivo en el crecimiento. Dichos argumentos aclaran que el problema de escala de este modelo no tiene nada que ver con los *spillovers* de la investigación. Los razonamientos siguen intactos incluso si $\gamma = 1$. El efecto de escala opera a través del impacto que un mayor mercado de producto tiene en los incentivos de las empresas a mejorar su eficiencia.
3. *Los recursos dedicados a la investigación son escasos*. Muchas naciones no tienen recursos dedicados a la investigación; de toda la producción norteamericana aproximadamente sólo un 3 por 100 se destina oficialmente a I+D, debido a que gran parte de la tecnología (incluso en los EE.UU.) es importada de otros países. De tal forma que, los modelos de investigación de base cobran más sentido a nivel mundial que a nivel nacional.

6.3. *Solow (1960) se encuentra con Parente (1994):* Las generaciones de capital humano como motor del crecimiento.

Parente (1994) ofrece un modelo de generaciones de capital humano sin capital físico. Este apartado añade a este modelo un sector de bienes de capital. Una vez más, el progreso técnico endógeno tiene lugar solamente en el sector de bienes de capital.

Como en los modelos de Arrow y Krusell, este progreso técnico se transmite a los productores de bienes de consumo bajo la forma de un beneficioso «efecto externo pecuniario»: la caída relativa del precio relativo del capital.

Imagine una economía con dos sectores de producción: consumo y bienes de capital. El sector de bienes de consumo es competitivo y no posee progreso tecnológico. El crecimiento de la productividad que ocurre en este sector surge porque, a lo largo del tiempo, el capital se abarata relativamente con respecto a los bienes de consumo y al trabajo.

El sector de los bienes de capital es también competitivo y su eficiencia aumenta a lo largo del tiempo. Un productor de bienes de capital, según Zeckhauser (1968) y Parente (1994), puede, en cualquier momento, incrementar la calidad de su tecnología, asumiendo cierto coste. El productor tiene un cierto nivel de experiencia asociado al manejo de una tecnología de cierta calidad. Con el tiempo, este nivel se incrementará como resultado del aprendizaje por la práctica. Los beneficios obtenidos por los productores de bienes de capital revierten en cada período a un consumidor representativo (que tiene unas preferencias como las descritas en la ecuación (21) y que ofrece una unidad de trabajo).

Sector de bienes de consumo. La función de producción para los bienes de consumo es

$$c = k^{\alpha} l^{1-\alpha} \tag{30}$$

donde k y l son los *inputs* capital y de trabajo. Esta tecnología no varía a lo largo del tiempo.

Sector de bienes de capital. Los bienes del capital son homogéneos pero para producirlos, la tecnología puede cambiar a discreción del productor de los bienes de capital. La tecnología del productor de los bienes de capital se describe como $o = Azh^{1-\alpha}$, donde o es el *output* del productor de los bienes de capital, A denota el *grado* de la tecnología que el productor utiliza, z representa el nivel de experiencia del productor y h la cantidad de trabajo que el productor emplea. La precio del capital está representado por p y el salario por w, ambos en unidades de consumo.

En cualquier fecha el problema de asignación de trabajo del productor es estático y da lugar a un flujo de beneficios dados por

$$\max_h \, (pAzh^{1-\alpha} - wh) = \alpha \left[\frac{(1-\alpha)}{w} \right]^{(1-\alpha)/\alpha} (pAz)^{1/\alpha} \equiv \pi(A, z, p, w)$$

Aprender haciendo. Supongamos que el conocimiento de un productor de una tecnología de un cierto grado, A, crece con la experiencia de acuerdo con

$$\frac{dz}{d\tau} = \lambda(1 - z), \quad \text{para} \quad 0 \le z \le 1$$

donde τ es el tiempo pasado desde que el productor adoptó dicha tecnología. Obsérvese que mientras que $z < 1$, el productor aprende haciendo. En contraste con las hipótesis de Arrow, sin embargo, esta tasa no depende del volumen de la producción, sino sencillamente del paso del tiempo. Finalmente, el productor alcanza el conocimiento total de la tecnología, de tal forma que z tiende a 1, lo cual supone el nivel máximo de experiencia[18].

Consideremos que z_τ representa el conocimiento acumulado de un productor con τ años de experiencia. Con la condición inicial de que $z_0 = \tilde{z} < 1$, la ecuación diferencial anterior tiene como solución

$$z_\tau = 1 - (1 - \tilde{z})e^{-\lambda t} \equiv Z_\tau(\tilde{z}) \tag{31}$$

para $\tau \geq 0$.

Mejora de la calidad. Un productor de bienes de capital puede, en cualquier momento, mejorar la tecnología que utiliza. Si el productor pasa de usar la tecnología A a utilizar la tecnología A' incurrirá a su vez en coste asociado al cambio de $\kappa + (\vartheta A')/A$, medido en términos de pérdida de experiencia. La idea es que cuanto mayor es el salto tecnológico que el productor da, menor es la experiencia que puede trasladar a la nueva situación.

Obsérvese que:

1. No hay una frontera tecnológica especificada exógenamente. Esto es, A' no está restringido[19], y aún así los productores no optan por un A' que sea tan grande como sea posible[20].
2. En contraste con Arrow (y con Krusell, si no fuera por su caso $\gamma = 1$), no hay un *spillover* tecnológico entre los productores por la acumulación del capital humano.

La Figura 6 representa la evolución de la PTF de un productor.

---

[18] La forma funcional de la curva de aprendizaje está tomada de PARENTE (1994). ZECKHAUSER (1968) tiene en cuenta una clase más amplia de curvas de aprendizaje.

[19] Una advertencia sobre el modelo de Parente: la elección de A' está restringida por el hecho de que el nivel de experiencia inherente a una adopción z_0 no puede ser negativo. Esta restricción podría eliminarse eligiendo una forma diferente para la pérdida de experiencia resultado del ascenso en el nivel de la tecnología. Un ejemplo de una forma funcional que podría conseguir esto es: $z_0 = (A'/A)^{\vartheta}(z_T - \kappa)$, donde $z_T > k$ refleja el nivel de destreza justo antes de la adopción y $\vartheta < 0$.

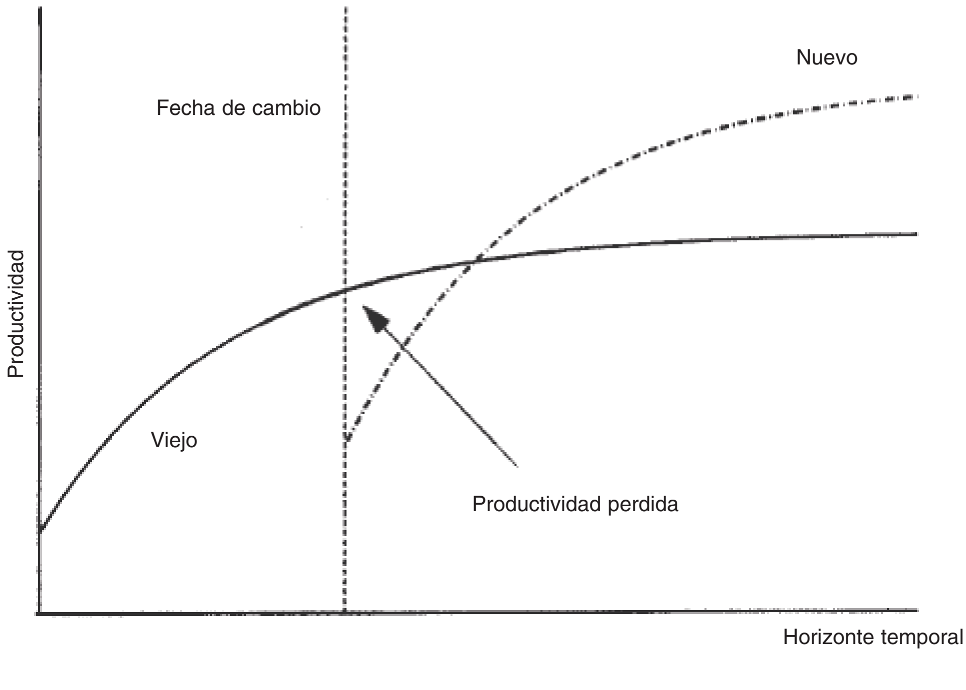
[20] CHARI y HOPENHAYN (1991) y JOVANOVIC y NYARKO (1996) también se centran en los costes de absorción basados en el capital humano. Estos modelos proporcionan una microfundamentación sobre por qué los costes asociados al cambio deberían ser mayores cuando la nueva tecnología es más avanzada. Esto implica que, cuando una empresa cambia a una nueva tecnología, puede perfectamente optar por una tecnología que se encuentra el interior de la frontera tecnológica. Esta implicación separa los modelos de generaciones de capital humano de sus homólogos de capital físico, porque éstos últimos implican que cualquier nueva inversión se sitúa en los métodos de frontera. Fricciones asociadas a búsqueda pueden también llevar a las empresas a adoptar métodos dentro de la frontera tecnológica. En los modelos de JOVANOVIC y ROB (1989) y JOVANOVIC y MACDONALD (1994), generalmente no es interesante para las empresas invertir tiempo y recursos en localizar la mejor tecnología a imitar.

Crecimiento equilibrado. La trayectoria de crecimiento equilibrado se obtiene a través de un proceso de conjetura y de verificación. Para este fin, supongamos que la economía exhibe crecimiento equilibrado en el instante cero. Parece razonable conjeturar que el consumo, la inversión, la producción agregada y el stock de capital crecerán, todos ellos, a tasas constantes, denotadas como antes por g_c, g_i, g_y y g_k. Si el consumo y la inversión permanecen como una fracción constante de la renta, entonces $g_c = g_i = g_y$. Partiendo de la ecuación (30), $g_y = \alpha g_k$.

Propiedades de la senda de crecimiento equilibrado conjeturada

1. Cada productor de bienes de capital elegirá aumentar el nivel A después de un intervalo T y por un factor ξ. Ni T ni ξ dependen del tiempo. Define g_A por $\xi = g^{g_A T}$. Entonces $g_A = (1/T) \ln \xi$ es la tasa media del crecimiento de la A de cada productor.
2. En cualquier instante las edades de las tecnologías en uso están distribuidas de manera uniforme sobre el intervalo $[0, T]$, con $1/T$ productores utilizando cada tipo de tecnología.
3. Todos los productores que utilizan una tecnología de un cierto grado tienen el mismo nivel de experiencia.
4. z_0 resuelve la ecuación $z_0 = Z_T(z_0) - \kappa - \upsilon\xi$.

FIGURA 6
EVOLUCIÓN DE LA PRODUCTIVIDAD



Teniendo en cuenta las propiedades 1 y 2 descritas anteriormente, la distribución de las tecnologías se moverá continuamente a la derecha a lo largo del tiempo, y el grado tecnológico máximo en uso en cada momento *t,* o $A_0(t)$, crecerá exponencialmente: $A_0(t) = A_0(0)e^{g_A t}$. Sea A_t el nivel de tecnología que fue actualizada hace τ periodos. Así, desde el punto de vista del productor que está utilizándola, τ corresponde a la edad de la tecnología A_τ. Por lo tanto, las propiedades 1 y 2 también implican que $A_\tau(t) = A_0(t)e^{-g_A\tau}$. En estado estacionario $(1/A_\tau[t])(dA_\tau[t]/dt) = g_A$ para todo τ. La normalización $A_0(0) = 1$ será empleada en lo sucesivo.

Por las propiedades 3 y 4, se entiende que $Z_T(z_0)$ corresponde al nivel de destreza de cada una de las plantas que emplea la tecnología A_T. Teniendo en cuenta las propiedades 2 y 3, la producción de los bienes de capital es

$$\left(\frac{A_0}{T}\right)\int_0^T e^{-g_A\tau} Z_\tau(z_0) h_\tau^{1-\alpha} d\tau = \frac{i}{p} \tag{32}$$

donde i es la inversión agregada medida en unidades de consumo y p es el precio del capital en términos de consumo. El lado izquierdo de la ecuación (32) implica que la producción de los bienes de capital crece a un tasa $g_k = g_A$, dado que, como se demostrará a continuación, h_τ es constante a lo largo del tiempo. En la tasa de crecimiento, la ecuación (32) muestra que $g_p = g_i - g_k$. Si la inversión significa mantener una fracción constante de los ingresos, entonces $g_i = g_y$ deben de mantenerse. Por tanto, $g_p = g_y - g_k = -(1-\alpha)g_A$.

Es fácil establecer que la distribución del trabajo permanece constante entre los diferentes niveles, lo cual implica que $h_\tau(t)$ no dependerá de t. La contratación óptima de trabajo en el sector de los bienes de consumo implica que $(1-\alpha)(k/l)^\alpha = w$. Si los salarios crecen a la misma tasa que la producción, $g_y = \alpha g_k$, entonces l se mantendrá constante a lo largo del tiempo. Asimismo, un productor de bienes de consumo usando una tecnología de edad τ contratará trabajo de acuerdo con la condición $(1-\alpha)h_\tau^{-\alpha} = w/(pA_\tau z_\tau)$. Porque $g_p = -(1-\alpha)g_A$ y $g_A = g_k$, el lado izquierdo de esta expresión se mantiene constante a través del tiempo y, por lo tanto, también lo es h_τ.

El problema de los productores. En crecimiento equilibrado, precios y salarios crecen a tasa constante como función de t, que, por tanto, juega el papel del «estado agregado». Para un productor de bienes de capital, las variables de estado son su destreza, z, y su grado tecnológico, A. De aquí, la ecuación de Bellman concerniente a su problema de decisión es

$$V(A, z; t) = \max_{T', A'} \left\{ \int_t^{t+T'} \Pi[A, Z_{s-t}(z); s] e^{-r(s-t)} ds + e^{rT'} V\left(A', Z_{T'}(z) - k - \vartheta \frac{A'}{A}; t + T'\right) \right\}$$

donde $\Pi(A, Z_{s-t}(z); s) \equiv \pi[A, Z_{s-t}(z), p(s), w(s)]$. Se supone que la tasa de interés r es constante.

Una política de actualización estacionaria (s, S). Se tiene todavía que verificar que la senda de crecimiento de equilibrio tiene la propiedad, conjeturada en (1), de que los productores de bienes de capital elijan aumentar el nivel A por un factor constante ξ, y después de un tiempo de espera constante, T. Si es así, entonces existe una regla (s, S) en el intervalo $[z_0, z_T]$, por lo que z siempre comienza a partir de $z_0 \geq 0$ (justo después de la mejora tecnológica) y se incrementa hasta el punto $z_T \leq 1$, lo cual pone en marcha la siguiente mejora, con una vuelta de z a z_0, y así sucesivamente. Para demostrar que la senda de crecimiento equilibrado sigue efectivamente este proceso, es útil considerar la siguiente la propiedad de la función de beneficio.

LEMA 4. Sea $a(t) \equiv A/A_0(t)$. Para $s \geq t$, $\Pi(A, z; s) = e^{\alpha g A t}\Phi[a(t), z, s-t]$.

PRUEBA. Como $g_p = -(1-\alpha)g_A$ y $g_w = \alpha g_A$, entonces los beneficios durante el período s, $\Pi(A, z; s)$, pueden expresarse como $[\alpha(1-\alpha)/w(s)]^{(1-\alpha)/\alpha}[p(s)Az]^{1/\alpha} = e^{(1/\alpha)gAt}\alpha(t)^{(1/\alpha)}z^{(1/\alpha)} \times c(0)e^{-[(1-\alpha)/\alpha+1-\alpha]gAs}$, donde $c(0)$ es una constante cuyo valor depende de ciertas variables en el instante 0. Después, basados en el hecho de que $(1/\alpha) - [(1-\alpha)/\alpha + 1 - \alpha]$ nos permite afirmar que $\Phi[a(t), z, s-t] = a(t)^{(1/\alpha)}z^{(1/\alpha)}xc(0)e^{-[(1-\alpha)/\alpha+1-\alpha]g_A(s-t)}$. Finalmente, la proposición se sigue de $\Phi[\mathrm{a}(t), z, s-t] = \alpha(t)^{(1/\alpha)}z^{(1/\alpha)} \times c(0)e^{-[(1-\alpha)/\alpha+1-\alpha]gA(s-t)}$. C.Q.D.

Sea $a' = A'/A_0(t+T')$. Entonces como $A_0(t) = e^{g_A t}$ y $A'/A = [a'/a][A_0(t-T')/A_0(t)] = e^{gAt}(a'/a)$, la ecuación de Bellman se convierte en

$$V(ae^{g_A t}, z; t) = e^{\alpha g_A t} \max_{T', a'} \left[\int_t^{t+T'} \Phi(a, Z_{s-t}(z)s-t)e^{-r(s-t)}ds \right.$$
$$\left. + e^{-(r-\alpha g_A t)T'} V\left(a', e^{g_A(t+T')}, Z_{T'}(z) - k - \vartheta e^{g_A T'} \frac{a'}{a}; t+T'\right)\right]$$

Ahora obsérvese que después de un cambio de variable $x = s - t$, $\int_t^{t+T'} \Phi(a, Z_{s-t}(z)s-t)e^{-r(s-t)}ds = \int_0^{T'} \Phi(a, Z_x)(z), x)e^{rx}dx$. Así, si se escribe $B(a, z; t) \equiv e^{-\alpha g_A t}V(ae^{g_A t}, z, t)$ la ecuación de Bellman se convierte en

$$B(a, z; t) = \max_{T', a'} \left[\int_0^{T'} \Phi(a, Z_x(z), x)e^{-rx}dx \right.$$
$$\left. + e^{-(r-\alpha g_A)T'} B\left(a', Z_{T'}(z) - \kappa - \vartheta e^{g_A T'} \frac{a'}{a}; t+T'\right)\right]$$

PROPOSICIÓN 5. *La política de actualización es estacionaria.*

PRUEBA. Consideremos la ecuación (1′). Para $\kappa > 0$, se puede acotar la política óptima T' por encima de cero. Ahora, como τg_A es el crecimiento del consumo, el comportamiento óptimo del ahorro de los consumidores implica que $r - \alpha g_A > 0$[21]. Por lo tanto, el operador es una contracción, y comenzando una iteración con una función B que no depende de t, se encuentra que el único punto fijo, $B(a, z)$ no depende de t. Denotamos las reglas de una decisión óptima por $T'(a, z)$ y $a'(a, z)$. Ya que T' y a' no dependen de t, la actualización por parte de cada productor tendrá un comportamiento periódico y por el mismo múltiplo. Todo ello es condicional a la existencia de una senda de crecimiento equilibrado. C.Q.D.

Definición de crecimiento equilibrado. Para que exista una trayectoria de crecimiento equilibrado tiene que darse una triple condición (ξ, T, z_0) como ésta, para todo t,

$$T'(1, z_0) = T \tag{33}$$

$$a'(1, z_0) = 1 \tag{34}$$

y

$$z_0 = Z_T(z_0) - \kappa - \vartheta\xi \tag{35}$$

En este caso, producción, consumo e inversión crecen a la tasa

$$\alpha g_A = \left(\frac{\alpha}{T}\right) \ln \xi$$

Juntas, las ecuaciones (33)-(35) explican que una economía que comienza en la senda de crecimiento de estado estacionario (descrita en las propiedades 1-4 dadas anteriormente en el apartado 6.3), permanecerá en él. Las ecuaciones (33) y (34) se refieren al comportamiento óptimo de un productor justo después de que haya modernizado su tecnología. Justo después de una mejora, el productor tiene una tecnología $A = A_0(t)$ y así, $a = 1$. Entonces el productor tendrá que elegir esperar T periodos (ecuación [33]) y, llegado el momento, tendrá que elegir mejorar A por un factor constante ξ (ecuación [34]). Finalmente, dados el T y ξ que ha elegido, la destreza del productor tiene que ser la misma después de cada modernización (ecuación (35)).

[21] Supongamos que las preferencia vienen descritas por la ecuación (21). Entonces, a lo largo de una trayectoria de crecimiento equilibrado, $r = \rho + g_y = \rho + \alpha g_k$. De ahí que $r - \alpha g_k = \rho$.

El proceso de sustitución. El modelo anterior genera una trayectoria de crecimiento equilibrado a lo largo de la cual la renta aumenta y el precio relativo del capital disminuye. El progreso tecnológico en el sector de bienes de capital es endógeno. En cada instante del tiempo se da una distribución de productores de bienes de capital, utilizando una variedad de técnicas de producción. Cada productor de bienes de capital decide cuándo aumentar el grado de su tecnología, y puesto que esto conlleva unos costes, en términos de pérdida de experiencia, el productor economizará la frecuencia con la que lleva a cabo la actualización. En el mundo real tales costes de adopción pueden ser bastante altos, lo que implica que el proceso de sustitución se hará más despacio[22].

Salter (1966) observó hace algún tiempo que el proceso de sustitución al nivel de la planta es lento. Salter cita a Hicks estableciendo que «el empresario, invirtiendo en capital fijo en equipamiento, hace presa a la fortuna. Mientras que la planta exista, la posibilidad de economizar cambiando el método o la escala de producción es pequeña; pero cuando la planta va a ser renovada estará en sus intereses el hacer un cambio radical» (4). El modelo anterior recoge este proceso, pero aquí, la inversión de capital es el conocimiento.

Como evidencia del lento proceso de sustitución, véase la Tabla 1, recopilada por Salter (1966). La primera columna refleja la productividad del trabajo de las plantas que usan las mejores tecnologías o las más actualizadas. Por otro lado, la segunda columna indica la media de la productividad del trabajo de las plantas. Como Salter (1966) apuntó

> «En esta industria, el promedio de la productividad del trabajo es aproximadamente tan solo la mitad de la productividad más eficiente. Si todas las plantas estuvieran a la altura de la mejor práctica estándar conocida y en uso, la productividad laboral se habría doblado inmediatamente. De hecho, transcurrió una década y media antes de que esto pasase, y en ese tiempo, el potencial proporcionado por la productividad con la mejor práctica más que se doble» (6).

Los resultados de Salter (1966) han resistido bien el paso del tiempo, ya que, en un reciente estudio del PTF de 21 plantas textiles a cuatro dígitos, Dwyer (1998) encuentra que el promedio de la PTF entre el segundo (desde arriba) decil dividido por el promedio de la PTF entre las plantas en el noveno decil (un procedimiento que es relativamente insensible a los valores extremos) está entre 2 y 3.

[22] Este tipo de modelo puede tener una dinámica de transición interesante. Imagine comenzar con cierta distribución de tecnologías donde los productores se organizan alrededor de una técnica particular. ¿Qué fuerzas económicas vendrán a animarles a no llevar a cabo todas las mejoras en la misma fecha en el futuro? ¿Cuánto tiempo tardará la distribución en separarse?

TABLA 1
MEJOR PRÁCTICA Y PROMEDIO EN LA INDUSTRIA ESTADOUNIDENSE DE ALTO HORNO (TONELADAS DE LINGOTES DE HIERRO POR HOMBRE-HORA, 1911-26)

Año	Plantas con mejor práctica	Promedio en la industria
1911	0,131	0,140
1917	0,326	0,150
1919	0,328	0,140
1921	0,428	0,178
1923	0,462	0,213
1925	0,512	0,285
1926	0,573	0,296

FUENTE: SALTER (1966).

7. Conclusiones: Solow (1956, 1957) contra Solow (1960)

Hace cuarenta años, Solow escribió algunos artículos clásicos sobre el crecimiento económico. En el artículo de Solow (1956), el progreso técnico llovía del cielo. La invención de nuevas técnicas y su aplicación eran gratuitas. El progreso técnico afectaba a la productividad de todos los factores de producción, capital y trabajo, ya fuesen nuevos o viejos, a todos por igual. Como contraste, en Solow (1960) el avance tecnológico está incorporado en la forma de los nuevos bienes de capital. Esta implementación no es gratuita ya que uno tiene que invertir para obtener los beneficios correspondientes. Esta forma de avance tecnológico es denominada como específica a la inversión.

Entonces, ¿cuál es el mejor marco? A continuación explicamos porqué el mejor marco es el modelo de generaciones de capital de Solow (1960). Primero, durante el periodo de posguerra se dieron unos avances tecnológicos tremendos en la producción de nuevos bienes de capital. El precio relativo de los bienes de capital descendió alrededor de un 4 por 100 por año. Segundo, la variedad en la productividad de las plantas en los Estados Unidos es enorme. Cuesta creer que parte de ello no se deba a las diferencias en los bienes de capital empleados. De hecho, Bahk y Gort (1993) se dieron cuenta de que el cambio de un año en la edad promedio del capital está asociado con un cambio del 2,5 al 3,5 por 100 en la producción de la planta. Ahora bien, hay evidencias que sugieren que el ritmo de progreso técnico específico a la inversión se ha elevado desde los años 70 con la llegada de las tecnologías de la información. Suponiendo que esto sea cierto, las variantes del marco de trabajo de Solow (1960), modificadas para incorporar la costes de implementación y mano de obra cualificada, pueden contribuir en cierta medida a explicar la reciente desaceleración en el crecimiento de la productividad y el incremento de la desigualdad de salarios.

¿Por qué es tan importante la fuente del progreso tecnológico? Porque tiene implicaciones para el crecimiento económico, el desempleo, y otras cuestiones que preocupan a la sociedad. Por ejemplo, si el progreso tecnológico está incorporado en la forma de nuevos bienes de capital, entonces las políticas que reducen el coste de adquisición del nuevo equipamiento (como los subsidios a la inversión para los compradores de equipamiento o los subsidios a la I+D para los productores de equipamiento) pueden estimular el crecimiento[23].

8. Referencias bibliográficas

[1] ADLER, P. y CLARK, K. (1991): «Behind the learning curve: A sketch of the learning process», *Management Science,* 37 (3): 267-81.

[2] ARGOTTE, L. y EPPLE, D. (1990): «Learning curves in manufacturing», *Science,* (247): 920-24.

[3] ARROW, K. (1962): «The economic implications of learning by doing», *Review of Economic Studies,* 29 (3): 155-73.

[4] AUTOR, D.; KATZ, L. y KRUGER, A. (1998): «Computing inequality: Have computers changed the labor market? *Quarterly Journal of Economics,* 113 (4): 1169-1213.

[5] BAHK, B.-H. y GORT, M. (1993): «Decomposing learning by doing in new plants», *Journal of Political Economy,* 101 (4): 561-83.

[6] BARTEL, A. y LICHTENBERG, F. (1987): «The comparative advantage of educated workers in implementing new technology», *Review of Economics and Statistics,* 69 (1): 1-11.

[7] BENHABIB, J. y Rustichini, A. (1991): «Vintage capital, investment, and growth», *Journal of Economic Theory,* 55 (2): 323-39.

[8] BENHABIB, J. y SPIEGEL, M. (1994): «The role of human capital in economic development: Evidence from aggregate cross country data», *Journal of Monetary Economics,* 34 (2): 143-73.

[8] CASELLI, F. (1999). «Technological revolutions», *American Economic Review,* 89 (1): 78-102.

[9] CHARI, V. V. y Hopenhayn, H. (1991): «Vintage human capital», *Journal of Political Economy,* 99 (6): 1142-65.

[10] DAVID, P. (1975): «The "Horndahl" effect in Lowell, 1834-56: A short-run learning curve for integrated cotton textile mills». En *Technical choice, innovation and economic growth: Essays on American and British economic experience,* Paul David, 174-96. Londres: Cambridge University Press.

[11] DAVID, P. (1991): «Computer and dynamo: The modern productivity paradox in a not-too-distant mirror. En *Technology and productivity: The challenge for economic policy,* 315-47. París: Organization for Economic Cooperation and Development.

[12] DENISON, E. (1964): The unimportance of the embodied question. *American Economic Review (Papers and Proceedings),* 54, no. 2, pt. 1: 90-93.

[13] DWYER, D. (1998). Technology locks, creative destruction, and nonconvergence in productivity levels. *Review of Economic Dynamics,* 1 (2): 430-73.

[23] Estimular el crecimiento no mejora necesariamente el bienestar. El sacrificio, en términos de consumo actual, podría ser prohibitivamente elevado.

[14] FEDERAL RESERVE BANK OF DALLAS (1997): «The economy at light speed. *Annual Report.*
[15] FLUG, K. and HERCOWITZ, Z. (2000): «Some international evidence on equipment-skill complementarity», *Review of Economic Dynamics,* 3 (3): 461-85.
[16] GOLDIN, C. y KATZ, L. (1998): «The origins of technology-skill complementarity», *Quarterly Journal of Economics,* 113 (3): 693-732.
[17] GORDON, R. (1990): *The measurement of durable goods prices.* Chicago: University of Chicago Press.
[18] GORT, M. y KLEPPER, S. (1982): «Time paths in the diffusion of product innovations», *Economic Journal,* 92 (367): 630-53.
[19] Greenwood, J.; Hercowitz, Z. y Krusell, P. (1997): «Long-run implications of investment-specific technological change», *American Economic Review,* 87 (3): 342-62.
[20] GREENWOOD, J. y Yorukoglu, M. (1997): «1974». *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy,* 46 (junio): 49-95.
[21] GRILICHES, Z. (1957): «Hybrid corn: An exploration in the economics of technological change», *Econometrica,* 25 (4): 501-22.
[22] GRILICHES, Z. (1969): «Capital-skill complementarity», *Review of Economics and Statistics,* 51 (4): 465-68.
[23] GRILICHES, Z. (1979): «Issues in assessing the contribution of research and development to productivity growth», *Bell Journal of Economics,* 10 (1): 92-116.
[24] Grübler, A. (1991): «Introduction to diffusion theory». Chapter 1 en *Models, case studies and forecasts of diffusion.* Vol. 3 de *Computer integrated manufacturing,* ed. Robert Ayres, William Haywood y Louri Tchijov. Londres: Chapman and Hall.
[25] HECKMAN, J.; LOCHNER, L. y TABER, C. (1998): «Explaining rising wage inequality: Explorations with a dynamic general equilibrium model of labor earnings with heterogeneous agents», *Review of Economic Dynamics,* 1 (1): 1-*58.*
[26] HULTEN, C. (1992): «Growth accounting when technical change is embodied in capital *American Economic Review,* 82 (4): 964-80.
[27] HULTEN, C. (1997): «Quality change, prices, and the productivity puzzle». University of Maryland, Department of Economics. Mimeo.
[28] JAFFE, A. (1986): «Technological opportunity and spillovers of *R&D:* Evidence from firms' patents, profits, and market value», *American Economic Review,* 76 (5): 984-1001.
[29] JOHANSEN, L. (1959): «Substitution versus fixed production coefficients in the theory of economie growth», *Econometrica,* 27 (2): 157-76.
[30] JONES, C. (1995): «Time series tests of endogenous growth models», *Quarterly Journal of Economics,* 110 (2): 495-525.
[31] JONSCHER, C. (1994): «An economic study of the information technology revolution», en *Information technology and the corporation of the 1990's,* ed. T. J. Allen y M. S. Scott Morton, 5-42, Oxford: Oxford University Press.
[32] JOVANOVIC, B. (1997): «Leaming and growth», en *Advances in economics,* vol. 2, ed. David Kreps y Kenneth Wallis, 318-39. Nueva York: Cambridge University Press.
[33] JOVANOVIC, B. (1998): «Vintage capital and inequality», *Review of Economic Dynamics,* 1 (2): 497-530.
[34] JOVANOVIC, B. y LACH, S. (1989): «Entry, exit and diffusion with learning by doing», *American Economic Review,* 79 (4): 690-99.
[35] JOVANOVIC, B. y LACH, S. (1997): «Product innovation and the business cycle», *International Economie Review,* 38 (1): 3-22.

[36] JOVANOVIC, B. y MACDONALD, G. (1994): «Competitive diffusion», *Journal oj Political Economy,* 102 (1): 24-52.
[37] JOVANOVIC, B. y NYARKO, Y. (1995): «A Bayesian learning model fitted to a variety of learning curves», *Brookings Papers on Economic Activity, Microeconomics,* 247-306.
[38] JOVANOVIC, B. y NYARKO, Y. (1996): «Learning by doing and the choice of technology», *Econometrica,* 64 (6): 1299-310.
[39] JOVANOVIC, B. y ROB, R. (1989): «The growth and diffusion of knowledge», *Review of Economic Studies,* 56 (4): 569-82.
[40] JOVANOVIC, B. y ROB, R. (1998): *Solow vs. Solow*. Nueva York University, Mimeo.
[41] KAPUR, S. (1993): «Late-mover advantage and product diffusion», *Economics Letters,* 43 (1): 119-23.
[42] KRUSELL, P. (1998): «Investment-specific R&D and the decline in the relative price of capital. *Journal of Economic Growth,* 3 (2): 131-41.
[43] KRUSELL, P.; OHANIAN, L.; RIOS-RULL, J.-V. y VIOLANTE, G. (2000): «Capital-skill complementarity and inequality», *Econometrica,* 68 (5): 1029-53.
[44] LUCAS, R. E. Jr. (1988) «On the mechanics of economic development», *Journal of Monetary Economics,* 22 (1): 3-42.
[45] MANSFIELD, E. (1963): «The speed of response of firms to new techniques», *Quarterly Journal of Economics,* 77 (2): 290-311.
[46] NELSON, R. (1964): «Aggregate production functions and medium-range growth projections», *American Economic Review,* 54 (5): 575-606.
[47] NELSON, R. y PHELPS, E. (1966): «Investment in humans, technological diffusion, and economic growth», *American Economic Review,* 56 (1-2): 69-75.
[48] PARENTE, S. (1994): «Technology adoption, learning-by-doing, and economic growth», *Journal of Economic Theory,* 63 (2): 346-69.
[49] ROMEO, A. (1975): «Interindustry and interfirm differences in the rate of diffusion of an innovation», *Review of Economics and Statistics,* 57 (3): 311-19.
[50] ROMER, P. (1990): «Endogenous technological change», *Journal of Political Economy,* 98, no. 5, pt. 2: S71-S102.
[51] SALTER, W. (1966): *Productivity and technical change,* Cambridge: Cambridge University Press.
[52] SOLOW, R. (1956): «A contribution to the theory of economic growth», *Quarterly Journal of Economics,* 70 (1): 65-94.
[53] SOLOW, R. (1957): «Technical change and the aggregate production function», *Review of Economics and Statistics,* 39 (3): 312-20.
[54] SOLOW, R. (1960): «Investment and technological progress», en *Mathematical methods in the social sciences 1959,* ed. Kenneth Arrow, Samuel Karlin y Patrick Suppes, 89-104. Stanford, Calif.: Stanford University Press.
[55] STIGLER, G. (1947). *Trends in output and employment.* Nueva York: Herald Square Press.
[56] ZECKHAUSER, R. (1968): «Optimality in a world of progress and learning», *Review of Economic Studies,* 35 (3): 363-65.

APÉNDICE
Definiciones de los datos y de las fuentes

El periodo de la muestra abarca desde 1948 a 1992, y todos los datos que a continuación se muestran son anuales. La renta real, y, se define como el PIB nominal menos el producto bruto nominal de la vivienda deflactado por el deflactor implícito del gasto de consumo personal en bienes no duraderos y servicios no relacionados con la vivienda. Las series de PIB se obtuvieron del Bureau of Economic Analysis (STAT – USA página web),y las series de precios fueron obtenidas de CITIBASE. El stock de capital del sector privado no residencial real neto, k, así como sus componentes de equipo y estructuras (k_e y k_s, respectivamente) fueron de nuevo descargados de la web del BEA. El total de horas empleadas en el sector privado, l, se obtiene a partir de CITIBASE (serie llamada LHOURS). La participación del trabajo, $1 - \alpha$, se construyó dividiendo la compensación nominal total a los empleados entre la renta nominal menos la renta nominal de la propiedad. Los datos han sido también sacados de la página web del BEA. La tasa (estándar) de progreso técnico se calcula utilizando

$$\ln z_t - \ln z_{t-1} = \ln\left(\frac{y_t}{l_t}\right) - \ln\left(\frac{y_{t-1}}{l_{t-1}}\right) - \frac{(\alpha_t + \alpha_{t-1})}{2}\left[\ln\left(\frac{k_t}{l_t}\right) - \ln\left(\frac{k_{t-1}}{l_{t-1}}\right)\right]$$

por lo que

$$z_t = \exp\left[\sum_{j=1949}^{t} (\ln z_j - \ln z_{j-1})\right]$$

con $z_{1948} = 1$.

El índice de precios para el equipamiento duradero de los productores se ha obtenido de Gordon (1990, hasta 1983, y Krusell *et al.,* 2000, después de 1983). El precio relativo del equipo, p, se calcula deflactando este índice de precios por el índice de precios al consumo. El progreso técnico específico a la inversión, q, es entonces igual a $1/p$.

Para calcular las series de k_e utilizadas en el apartados 6.3, usamos una aproximación discreta a la ecuación (6). El punto de partida para las series de equipo fue tomado como el valor de k_e implicado por la trayectoria de crecimiento equilibrado del modelo para el año 1947 como resulta de la relación

$$k_e = \frac{q i_e}{(g_y + 1)(g_q + 1) - (1 - \delta_e)}$$

donde i_e es la inversión fija interior privada bruta nominal en equipo duradero de los productores (de la página web del BEA) deflactada por el índice de precios del gasto personal de consumo de bienes no duraderos y servicios no relacionado con viviendas.

Mala medición del progreso técnico neutral en la contabilidad del crecimiento tradicional

Para simplificar, supongamos que la mano de obra es constante. Ahora, supongamos que un contable del crecimiento no tiene en cuenta el progreso técnico específico a la inversión en su análisis. Entonces construiría sus series del stock de capital de acuerdo con

$$\frac{d\tilde{k}}{d_t} = i - \delta\tilde{k} \tag{A1}$$

Esto se corresponde con medir el stock de capital a su coste histórico en unidades de producción. Utilizando la ecuación (2), se obtendrían las siguientes series que describen el progreso técnico neutral:

$$g_{\tilde{z}} = g_y - \alpha g_{\tilde{k}}$$

Puesto que se supone que todo el crecimiento en la producción tiene que provenir del crecimiento del stock de capital, ha de resultar de la ecuación (3) que $g_y = \alpha g_k$, por lo que

$$g_{\tilde{z}} = \alpha(g_k - g_{\tilde{k}})$$

De ahí, cualquier cambio en la medida del residuo de Solow surge únicamente de la mala medición del stock del capital. Para entender esta ecuación, suponga que la economía estuviera desplazándose a lo largo de la trayectoria de crecimiento equilibrado. De las ecuaciones (4) y (A1), está claro que en esta situación, $g_k - g_{\tilde{k}} = g_q$, implicando $g_{\tilde{z}} = \alpha g_q$. Aunque el contable del crecimiento ha podido eliminar el progreso técnico específico a la inversión por su mala especificación de la ley de movimiento del capital, éste, se ha resucitado a sí mismo en forma de progreso técnico neutral.

Este modelo exige que el PIB sea medido en unidades de consumo, el numerario. Es importante hacerlo de esta manera. ¿Qué pasaría si el contable del crecimiento usase valores numéricos estándar del PIB real? Específicamente, el PIB debe ser medido como

$$\tilde{y} = c + \bar{p}qi$$

donde $\bar{p}$ equivale al precio de los bienes de capital en algún año base. Aplicando la ecuación (2), el contable del crecimiento obtendría

$$g_{\tilde{z}} = g_{\tilde{y}} - \alpha g_k = g_{\tilde{y}} - g_y$$

La diferencia de las tasas de crecimiento entre la forma tradicional de medir el PIB, $\tilde{y}$, y la basada en unidades de consumo, y, serán recogidas como progreso técnico neutral. Ahora,

$$g_{\tilde{y}} = \left(\frac{c}{\tilde{y}}\right) g_c + \bar{p} \left(\frac{iq}{\tilde{y}}\right) g_i + \bar{p} \left(\frac{iq}{\tilde{y}}\right) g_q$$

A lo largo de la trayectoria de crecimiento equilibrado $g_c = g_i = g_y$. Puesto que q está creciendo, debe por lo tanto resultar que $(c/\tilde{y}) \rightarrow 0$ y $(\bar{p}iq/\tilde{y}) \rightarrow 1$. De ahí, asintóticamente

$$g_{\tilde{y}} = g_i + g_q = g_y + g_q$$

de modo que de la ecuación (A2), $g_{\tilde{z}} = g_q$.

Una vez más, el progreso técnico específico a la inversión queda enmascarado como progreso tecnológico neutral.