

Subsidios al desguace de bienes duraderos, heterogeneidad y ecos de reemplazo*

Omar Licandro

European University Institute y FEDEA

Antonio R. Sampayo

Dpto. de Fundamentos de Análisis Económico

Universidad de Santiago de Compostela

Resumen

En un contexto con consumidores heterogéneos y reemplazo endógeno de bienes duraderos, analizamos la propagación dinámica de un subsidio al reemplazo. Encontramos que el subsidio genera fluctuaciones endógenas en las compras de bienes duraderos. Pero la heterogeneidad en la edad de reemplazo suaviza las fluctuaciones, que tienden a desaparecer en la transición al estado estacionario. Sin embargo, la exigencia de una edad mínima de reemplazo para poder acceder al subsidio, atenúa el papel de la heterogeneidad en la eliminación de las fluctuaciones de forma que, dependiendo del perfil de la heterogeneidad, puede incluso no existir convergencia al nuevo estado estacionario.

Palabras clave: ecos de reemplazo, heterogeneidad.

Clasificación JEL: D11, E21, E32.

Abstract

In this work we study the dynamic propagation of a subsidy to the replacement of durable goods. Using a model with heterogeneous consumers, the introduction of a replacement subsidy gives rise to endogenous fluctuations in durable sales propagating periodically forward in time. However, heterogeneity among consumers tends to smooth fluctuations restricting their existence to the transition between steady states. We also find that the existence of a durable age threshold to take advantage of the subsidy, attenuates the smoothing role of heterogeneity and, depending on the shape of owners distribution, it can preclude the convergence to the steady state.

Keywords: replacement echoes, heterogeneity.

JEL classification: D11, E21, E32.

1. Introducción

En este trabajo se estudian los efectos de la introducción de un subsidio al desguace sobre la evolución dinámica de las ventas de bienes duraderos. Se trata de un subsidio al que se puede acceder sólo si el bien desguazado supera una determinada edad y es reemplazado por uno nuevo. Para este análisis vamos a utilizar el modelo de reemplazo de Licandro y Sampayo (2006) en el que los bienes duraderos (automóviles) tie-

* Los autores agradecen la ayuda financiera recibida del Ministerio de Educación y Ciencia, a través de los proyectos de investigación SEC2000-0260 y SEJ2004-0459/ECON.

nen una vida finita y, como consecuencia, el reemplazo de bienes duraderos exhibe una cierta periodicidad. En este contexto muestran que la introducción de un subsidio al reemplazo puede generar un incremento inicial importante en los reemplazos, como consecuencia de la reducción en la edad de reemplazo óptima de los automóviles¹.

Pero en aquel trabajo no se analizaba la dinámica de los reemplazos. Aquí se adapta aquel marco analítico para ese fin y se muestra que si un shock exógeno, como por ejemplo el shock fiscal representado por el subsidio, ocasiona un incremento repentino en el reemplazo de bienes duraderos que tenderá a reproducirse en el futuro, algo que denominaremos *ecos de reemplazo*. Boucekkine, Germain y Licandro (1997), en un contexto diferente pero relacionado –un modelo de crecimiento con progreso técnico incorporado–, obtienen el mismo resultado para la inversión agregada. Dos son los factores que explican la existencia de ecos: la (ausencia de) curvatura en la función de utilidad de los consumidores y la (ausencia de) heterogeneidad en el comportamiento de esos mismos consumidores. El primer supuesto, como su artículo muestra, es además conveniente para la resolución del modelo, de forma que se puede obtener una expresión explícita para la edad de reemplazo como función de los parámetros del modelo. Pero por otra parte, este supuesto influye de manera importante en la propagación dinámica de cualquier perturbación. De hecho, con utilidad lineal, cualquier incremento inicial en la inversión agregada se reproducirá periódicamente en el futuro, dando lugar a fluctuaciones cíclicas perpetuas. Para evitar este resultado extremo, Boucekkine, Germain, Licandro y Magnus (1998) exploran las consecuencias para el reemplazo de asumir preferencias no lineales. Dado que a los consumidores con preferencias no lineales no les gustan las fluctuaciones en el consumo que se derivan de las fluctuaciones en la inversión, transfieren recursos intertemporalmente para eliminarlas de forma que el consumo sólo fluctúa en la transición al estado estacionario.

En el presente trabajo se considera una cuestión relacionada, el reemplazo de bienes duraderos, manteniendo el supuesto de utilidad lineal y explorando una vía diferente para suavizar las fluctuaciones endógenas en el reemplazo: se introduce heterogeneidad en los consumidores y se analiza qué consecuencias tiene esto en la propagación dinámica de los efectos de un subsidio al reemplazo. Se verá que la heterogeneidad es también un mecanismo que contribuye a reducir la importancia de las fluctuaciones agregadas generadas por el llamado *efecto eco*, limitando su existencia también a la transición al estado estacionario.

Además, se pone de manifiesto la importancia que tienen para la dinámica del reemplazo algunos de los rasgos que caracterizan a las decisiones de reemplazo y a los programas de subsidios –en particular, la vida finita de los bienes duraderos, la exigencia de que el bien reemplazado tenga una edad mínima para poder acceder al subsidio y la heterogeneidad en el comportamiento de reemplazo por parte de los

¹ Un subsidio al reemplazo como el planteado ha sido implementado en varios países europeos –entre ellos en España–, así como en varios estados norteamericanos (véase FONTANA, 1999).

consumidores—. Aunque la vida finita de los bienes duraderos implica que el incremento inicial en las compras se reproduzca en el futuro, la interacción de la heterogeneidad con la edad umbral de acceso al subsidio, condiciona esta evolución de una manera interesante. Se distinguirán dos casos: un subsidio al reemplazo permanente y uno temporal. Esta diferencia será importante y, de hecho, se verá que en el caso permanente —pero no en el temporal—, la presencia de un umbral en la edad de acceso al subsidio, reduce la heterogeneidad en el comportamiento de reemplazo y reduce con ello su efecto suavizador de las fluctuaciones.

Adda y Cooper (2000) analizan los efectos de una política similar en Francia. Sin embargo, su marco de trabajo es diferente del que se plantea aquí, ya que introducen heterogeneidad estocástica e idiosincrática, no correlacionada temporalmente. En este caso la heterogeneidad es determinística y persistente en el tiempo. Dado que se trata de estudiar la importancia de la heterogeneidad en la propagación dinámica de una perturbación fiscal, este planteamiento puede ser visto como el contexto más favorable a la presencia de ecos de reemplazo, que en el trabajo de Adda y Cooper están prácticamente ausentes.

El resto del artículo se organiza del siguiente modo. En la sección 2 se presenta un modelo de reemplazo de bienes duraderos. En la sección 3, partiendo de un estado estacionario, se simulan las consecuencias de la introducción de un subsidio permanente al reemplazo. La sección 4 reproduce el análisis de la sección 3, pero para un subsidio temporal. Finalmente, la sección 5 presenta las conclusiones.

2. La decisión de reemplazar un bien duradero

El modelo de reemplazo que se utiliza ha sido analizado con detalle en Licandro y Sampayo (2006). Por lo tanto, aquí simplemente se presentan sus rasgos más relevantes para el estudio de la dinámica, que es el objetivo.

Cada consumidor posee uno y sólo un bien duradero y obtiene utilidad del consumo de un bien no duradero y de los servicios que le proporciona el bien duradero. El tiempo es una variable continua y las preferencias del consumidor son separables, lineales y están dadas por $\theta e^{\gamma t} c(t) + e^{\gamma(t-a)}$. Los servicios procedentes del bien duradero dependen de su edad a , de forma que un bien duradero comprado en el instante $t - a$, proporciona una utilidad $e^{\gamma(t-a)}$, donde $\gamma > 0$ define la tasa de progreso técnico exógeno. Se supone que los servicios de los bienes no duraderos crecen a la misma tasa que los servicios de los duraderos. $\theta e^{\gamma t}$ denota la utilidad marginal del consumo de no duraderos. Los consumidores son heterogéneos en la utilidad marginal que asignan a los bienes no duraderos a través del parámetro idiosincrático θ . La función de densidad que caracteriza a la población es la función $\zeta(\theta)$ para todo $\theta \in [0, \infty)$. Denotamos por $N(\theta, t)$ la población de cada tipo y suponemos que está creciendo a una tasa constante y exógena n , de tal manera que la población total también crece a la misma tasa.

Cada consumidor posee en cada instante un ingreso exógeno $y > 0$, que puede ser gastado en bienes duraderos y no duraderos. El precio de los bienes duraderos nuevos es p . Cuando un duradero es enviado a desguace su valor es $d < p$. Ignoramos la existencia de un mercado secundario de forma que un bien es poseído por el mismo propietario a lo largo de toda su vida útil. Finalmente suponemos una tasa de fallo de los bienes duraderos igual a $\delta > 0$. Todas estas magnitudes son exógenas y constantes.

En este contexto, cada consumidor se enfrenta a un problema de decisión discreta que consiste en decidir la edad óptima de reemplazo T del bien duradero, que resuelve la siguiente ecuación:

$$W(a) = \max \{V(a), J(a)\}$$

con $v(a)$ y $J(a)$ denotando, respectivamente, el valor de mantener un bien duradero de edad a , y de reemplazarlo por uno nuevo. Con todos los supuestos antes mencionados, Licandro y Sampayo (2006) muestran que:

1. Existe un valor de θ , que denotamos por θ_{sup} , de forma que los propietarios de bienes duraderos tales que $\theta \geq \theta_{\text{sup}}$ nunca reemplazan su bien duradero. θ_{sup} se define como el tipo para el que el coste de reemplazo, ponderado por la utilidad marginal del consumo de no duraderos, es igual al valor descontado de los servicios de un duradero de vida infinita. Es decir,

$$(p - d)\theta_{\text{sup}} = \frac{1}{\delta + \rho}$$

2. Para $\theta \in [0, \theta_{\text{sup}}]$ la siguiente expresión

$$\theta(p - d) = \frac{1 - e^{-(\delta + \rho)T}}{\delta + \rho} - \frac{e^{-\gamma T} - e^{-(\delta + \rho)T}}{\delta + \rho - \gamma} \quad (1)$$

define implícitamente una edad de reemplazo óptima $T = T(\theta; \delta, \rho, \gamma, p, d)$ como función del tipo del consumidor, dados los parámetros del modelo — ρ es la tasa de descuento intertemporal del consumidor—. Abreviadamente escribiremos $T = T(\theta)$. Es importante tener en cuenta que la función $\theta(T)$ que aparece en (1) no tiene una inversa explícita, por lo que tendremos que recurrir a la simulación numérica para obtener resultados.

3. Si, en estado estacionario, se introduce de forma inesperada el siguiente subsidio al reemplazo $s > 0$:

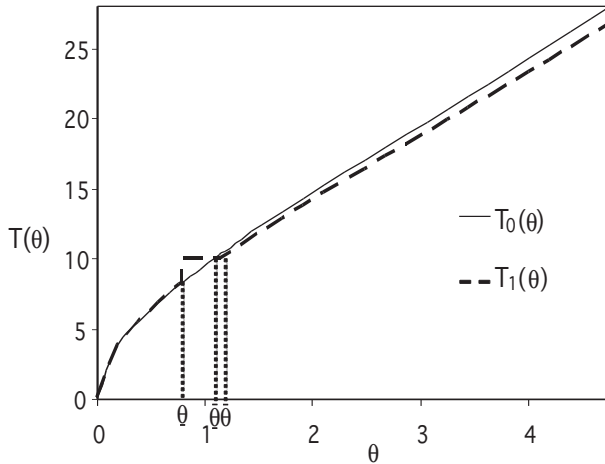
$$d_1 = \begin{cases} d_0 & \text{si } T(\theta) < \bar{T} \\ d_0 + s & \text{si } T(\theta) \geq \bar{T} \end{cases} \quad (1)$$

donde $d_0 > 0$ es el valor de desguace del bien duradero con anterioridad al subsidio, entonces la nueva edad óptima de reemplazo es:

$$T = \begin{cases} T_0(\theta) & \text{si } \theta \leq \underline{\theta} \\ \bar{T} & \text{si } \underline{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta} \\ T_1(\theta) & \text{si } \bar{\theta} \leq \theta < \theta_{\text{sup}} \end{cases}$$

donde $T_0(\theta)$ y $T_1(\theta)$ están dadas por (1) con $d = d_0$ y $d = d_1$, respectivamente. $\underline{\theta}$ denota el individuo que está indiferente entre acogerse al subsidio o no. $\bar{\theta}$ y θ_{sup} denotan, respectivamente, los tipos tales que $T_0(\bar{\theta}) = \bar{T}$ y $T_1(\theta_{\text{sup}}) = \bar{T}$. La Figura 1 muestra las dos edades óptimas de reemplazo como función del tipo. Tal como puede verse, $T_1(\theta) \leq T_0(\theta)$ para $\theta \in [\bar{\theta}, \theta_{\text{sup}}]$. Los consumidores en el intervalo $[0, \underline{\theta}]$ no cambian su comportamiento. El intervalo $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ retrasa el reemplazo desde $T_0(\theta)$ a $\bar{T}$. Sin embargo, estos bienes no serán reemplazados hasta que llegue el instante $t(\theta) = \bar{T} - T_0(\theta)$, puesto que es en este momento cuando el duradero alcanza la edad $\bar{T}$, que es la mínima para poder acceder al subsidio. A partir de este momento, la edad de reemplazo será $\bar{T}$. En el intervalo $[\bar{\theta}, \theta_{\text{sup}}]$ el reemplazo se adelanta de $T_0(\theta)$ a $\bar{T}$. Finalmente, el intervalo $[\bar{\theta}, \theta_{\text{sup}}]$ adelanta su edad de reemplazo de $T_0(\theta)$ a $T_1(\theta) \geq \bar{T}$.

FIGURA 1
EDAD DE REEMPLAZO ÓPTIMA ANTES Y DESPUÉS DEL SUBSIDIO



NOTA: Este gráfico se ha representado usando los valores numéricos de la Tabla 1 para los parámetros.

4. Los bienes duraderos per cápita en uso en el instante t , para cada tipo de consumidores θ , son:

$$\int_{t-T(\theta)}^t m(\theta, z) e^{-(\delta+n)(t-z)} dz = 1 \quad (2)$$

donde $m(\theta, z)$ denota los bienes duraderos comprados por estos individuos en instante z —téngase en cuenta que los duraderos comprados antes del momento $t - T(\theta)$ ya han sido reemplazados antes de t —. Diferenciando (2) con respecto a t resulta:

$$m(\theta, t) = m(\theta, t - T(\theta)) e^{-(\delta+n)T(\theta)} + \delta + n \quad (3)$$

Como, en estado estacionario, $m(\theta, t) = m(\theta, t - T(\theta)) = m(\theta)$, tenemos

$$m(\theta) = \frac{\delta + n}{1 - e^{-(n+\delta)T(\theta)}} \quad (4)$$

Finalmente, las compras agregadas de bienes duraderos son:

$$m(t) = \int_0^{\theta_{\text{sup}}} m(\theta, t) \zeta(\theta) d\theta \quad (5)$$

En este marco analítico, vamos a analizar la evolución dinámica de las ventas de bienes duraderos, y su convergencia al estado estacionario cuando el gobierno introduce un subsidio al reemplazo como el descrito más arriba, ya sea este subsidio transitorio o permanente. En particular pretendemos averiguar si la presencia de heterogeneidad en el reemplazo contribuye a eliminar los ecos que pueda generar la política mencionada, así como la forma en que opera dicha heterogeneidad.

En las dos secciones siguientes, analizaremos estas cuestiones tanto para el caso de un subsidio transitorio como permanente. Supondremos que el subsidio es completamente inesperado por los consumidores, tanto en el momento de su introducción como, en el caso transitorio, de su eliminación. En el análisis de la dinámica que aparece a continuación eludimos los detalles más técnicos, que forman parte de un apéndice que puede solicitarse a los autores².

² Este apéndice puede también descargarse en <http://oro1.usc.es/~aesamp>. En esta página web también puede descargarse el programa de Gauss que hemos utilizado para realizar las simulaciones.

3. Dinámica de las compras de bienes duraderos en respuesta a un subsidio permanente al reemplazo

Supongamos que en $t=0$ la economía está en estado estacionario y que $m(t, \theta) = m_0(\theta)$ para todo $t < 0$, donde $m_0(\theta)$ viene dado por (4) con $T(\theta) = T_0(\theta)$. Si un subsidio como el descrito anteriormente es introducido en $t=0$, todos los propietarios tales que $\theta \geq \bar{\theta}$ y que poseen un bien duradero de edad mayor que $T_1(\theta)$, desearán reemplazarlo. Aquellos propietarios tales que $\underline{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta}$ retrasan su reemplazo durante un periodo de tiempo $\bar{T} - T_0(\theta)$, justo el tiempo necesario para que el duradero alcance la edad $\bar{T}$ que le permite acceder al subsidio. Por lo tanto, la proporción de individuos que pueden recibir el subsidio en $t=0$ son aquellos que poseen un bien duradero de edad $T \in [\bar{T}, T_0(\theta)]$ si $\underline{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta}$, o $T \in [T_1(\theta), T_0(\theta)]$ si $\bar{\theta} \leq \theta < \theta_{\sup}^1$ ³. Si, después de substituir $m_0(\theta)$ por su valor, integramos para cada tipo la ecuación (2) en el intervalo correspondiente, obtenemos lo que denominamos *efecto inicial* del subsidio para cada tipo de consumidores, $I(\theta)$:

$$I(\theta) = \begin{cases} \frac{e^{-(n-\delta)\bar{T}} - e^{-(n+\delta)T_0(\theta)}}{1 - e^{-(n+\delta)T_0(\theta)}} & \text{si } \underline{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta} \\ \frac{e^{-(n+\delta)T_1(\theta)} - e^{-(n+\delta)T_0(\theta)}}{1 - e^{-(n+\delta)T_0(\theta)}} & \text{si } \bar{\theta} \leq \theta \leq \theta_{\sup}^0 \\ n + \delta & \text{si } \theta_{\sup}^0 \leq \theta \leq \theta_{\sup}^1 \end{cases} \quad (6)$$

y las compras agregadas, generadas por el subsidio inicialmente son

$$I = \int_{\underline{\theta}}^{\theta_{\sup}^1} I(\theta) \zeta(\theta) d\theta \quad (7)$$

Además, los consumidores tales que $\underline{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta}$ retrasan su reemplazo y sus compras son $\delta + n$, lo suficiente para reemplazar las roturas y dotar de un bien duradero a cada nuevo consumidor.

Es conveniente hacer siguientes observaciones:

1. Efecto inicial. Dado que el subsidio es inesperado, un intervalo de tipos reacciona simultáneamente en el instante $t=0$, dando lugar a un efecto inicial en las compras igual a $I(\theta)$, que tiene medida infinita con respecto a las compras pasadas,

³ Como ya hemos visto, el valor de $\theta_{\sup}^0$, que define una cota superior para los tipos cuya edad de reemplazo es finita, es endógeno y su valor depende del valor del subsidio. Si denotamos por $\theta_{\sup}^1$ y $\theta_{\sup}^0$ los valores de $\theta_{\sup}$ antes y después del subsidio respectivamente, tenemos que $\theta_{\sup}^1 > \theta_{\sup}^0$.

$m_0(\theta)$. Este incremento repentino en la demanda genera un problema de factibilidad, ya que un infinito de bienes sería necesario para satisfacer una demanda infinita. Para evitar este problema, asumimos que las compras de bienes duraderos que forman parte del efecto inicial se distribuyen uniformemente en el intervalo temporal $[0, t_1]$, de forma que

$$I(t, \theta) = \frac{I(\delta)}{t_1}, \quad \forall t[0, t_1] \quad (8)$$

donde $I(\theta)$ viene dado por (6).

2. La dinámica para cada tipo de consumidores de los que reducen su edad de reemplazo a $T_1(\theta) > \bar{T}$. La edad de reemplazo salta instantáneamente de $T_0(\theta)$ a $T_1(\theta)$ y la dinámica de las compras para los consumidores tales que $\theta \in [\bar{\theta}, \theta_{\sup}^I]$ es resultado de sumar el reemplazo de las compras pasadas, dado por la ecuación (3) con $T(\theta) = T_1(\theta)$, y el efecto inicial tal y como se computa en el punto anterior. En el intervalo de tiempo $[0, t_1)$, las compras para cada tipo están dadas por

$$m(\theta, t) = m_0(\theta)e^{-(n+\delta)T_1(\theta)} + \delta + n + \frac{I(\delta)}{t_1}e^{-(n+\delta)t}$$

En el intervalo $[t_1, T_1(\theta)]$ las compras son

$$m(\theta, t) = m_0(\theta)e^{-(n+\delta)T_1(\theta)} + \delta + n$$

En general:

a) Para $t \in [(h-1)T_1(\theta), (h-1)T_1(\theta) + t_1)$, $h = \{1, 2, 3, \dots\}$

$$m(\theta, t) = m_0(\theta)e^{-(n+\delta)hT_1(\theta)} + (\delta + n) \sum_{j=0}^{h-1} e^{-(n+\delta)T_1(\theta)j} + \frac{I(\delta)}{t_1} e^{-(n+\delta)t} \quad (9)$$

b) Para $t \in [(h-1)T_1(\theta), hT_1(\theta))$, $h = \{1, 2, 3, \dots\}$

$$m(\theta, t) = m_0(\theta)e^{-(n+\delta)hT_1(\theta)} + (\delta + n) \sum_{j=0}^{h-1} e^{-(n+\delta)T_1(\theta)j} \quad (10)$$

donde $m_0(\theta)$ está dado por (4) con $T(\theta) = T_0(\theta)$ para todo $t \in [-t_1(\theta), 0)$. Está claro que, siempre que $\delta + n > 0$, $m(\theta, t)$ converge a su valor de estado estacionario conforme tiende a infinito. El mismo argumento puede aplicarse a

los propietarios tales que $\theta \in [\bar{\theta}, \bar{\theta}]$, pero usando $\bar{T}$ en lugar de $T_1(\theta)$ en las ecuaciones (9) y (10).

Para agregar estas compras, debe tenerse en cuenta la existencia de dos discontinuidades. La primera tiene lugar en $t = 0$ cuando son reemplazados

$\frac{I(t, \theta)}{t_1}$ bienes duraderos, mientras que la segunda ocurre en $t = t_1$ cuando el

efecto inicial del subsidio desaparece. Ambas discontinuidades se reproducen en el futuro, en los instantes $T_1(\theta)$, $2T_1(\theta)$, $3T_1(\theta)$, ... y $T_1(\theta) + t_1$, $2T_1(\theta) + t_1$, $3T_1(\theta) + t_1$, ... Aunque la discontinuidad inicial tiene una periodicidad $T_1(\theta)$ para cada tipo de consumidores, las compras agregadas de todos los propietarios tales que $\theta > \bar{\theta}$ tienen solamente una discontinuidad en $t = 0$ y $t = t_1$. A partir de $t = \bar{T}$, los reemplazos de las compras que tuvieron lugar en la fase inicial del subsidio, aparecen de forma continua en el tiempo. Además, la heterogeneidad de los consumidores suaviza el perfil de las compras, tal y como el próximo comentario pone de manifiesto.

3. Efecto eco y suavización por agregación. El reemplazo futuro de las compras iniciales generadas por el subsidio, puede ocasionar fluctuaciones endógenas periódicas *—efecto eco—*, tal y como analizamos en los puntos 1 y 2 anteriormente. La relevancia de este hecho depende de manera fundamental de la distribución $\zeta(\theta)$, tal y como muestran más adelante las simulaciones numéricas. Las fluctuaciones endógenas tienden a desaparecer debido a dos factores: primero, las roturas de bienes duraderos y el crecimiento de la población; y segundo, la heterogeneidad de la población respecto de la edad de reemplazo. Cabe destacar que n y δ operan a nivel individual mientras que la heterogeneidad opera a nivel agregado de forma que incluso si $n + \delta = 0$, las fluctuaciones desaparecen como consecuencia de la heterogeneidad en el reemplazo. Consideremos, por ejemplo los tipos $\theta \in [\theta^a, \theta^b]$, tales que $12 = T_1(\theta^a)$ y $16 = T_1(\theta^b)$ y que reciben el subsidio en $t = 0$. Todos estos consumidores reemplazarán de nuevo su bien duradero entre los instantes $t = 12$ y $t = 16$, distribuyendo sus compras en un intervalo de tamaño 4. Cuando reemplacen por segunda vez, lo harán entre $t = 24$ y $t = 32$, distribuyendo las compras en un intervalo de tamaño 8, y así sucesivamente. Los reemplazos de bienes que inicialmente fueron comprados al mismo tiempo como consecuencia del subsidio, se distribuyen sobre un intervalo de tiempo cada vez más amplio, de forma que los ecos de reemplazo tienden a desaparecer —véase, sin embargo, el punto siguiente.

4. Con el subsidio, heterogeneidad en las preferencias no implica necesariamente heterogeneidad en el reemplazo. El comentario 3 no se aplica a los individuos tales que $\theta \in [\bar{\theta}, \bar{\theta}]$. Todos los propietarios de bienes duraderos en este intervalo que reciben el subsidio y reemplazan, por tanto, en $t \in [0, t_1)$, vuelven a reemplazar de nuevo en cada $t \in [h\bar{T}, h\bar{T} + t_1)$, con $h = 1, 2, 3, \dots$, todos en el mismo

instante —excepto, claro, las roturas, que serán reemplazadas en el momento en que se producen—. En este caso, la heterogeneidad no juega su papel de suavizar los ecos y estos no desaparecen, a menos que $n + \delta > 0$.

5. Las consecuencias del retraso en el reemplazo. Todos los consumidores tales que $\bar{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta}$ no reciben el subsidio en el momento en que aparece sino más tarde, y retrasan su reemplazo durante un intervalo de tiempo que depende del tipo y está dado por $[0, \bar{T} - T_0(\theta)]$. Durante este periodo, las compras de bienes duraderos por parte de estos individuos son $\delta + n$, las necesarias para reemplazar los bienes que se han roto y para proveer a los nuevos consumidores con un bien. En $t \in [\bar{T} - T_0(\theta), \bar{T}]$ estas compras son

$$m(\theta, t) = m_0(\theta)e^{-(n+\delta)\bar{T}} + \delta + n$$

en $t \in [\bar{T}, 2\bar{T} - T_0(\theta)]$,

$$m(\theta, t) = (\delta + n)e^{-(n+\delta)\bar{T}} + \delta + n$$

En general, para $h = \{1, 2, 3, \dots\}$ y

a) para $t \in [(h-1)\bar{T}, h\bar{T} - T_0(\theta)]$,

$$m(\theta, t) = (\delta + n) \sum_{j=0}^{h-1} e^{-(n+\delta)j\bar{T}} \quad (11)$$

b) para $t \in [h\bar{T} - T_0(\theta), h\bar{T}]$,

$$m(\theta, t) = m_0(\theta)e^{-(n+\delta)hT_1(\theta)} + (\delta + n) \sum_{j=0}^{h-1} e^{-(n+\delta)T_1(\theta)j} \quad (12)$$

Las compras agregadas se computan integrando sobre θ . Aunque en el caso de que $n + \delta = 0$, no habrá convergencia al nuevo estado estacionario para cada tipo, las simulaciones numéricas muestran que las compras agregadas pueden converger dependiendo de $\zeta(\theta)$, poniendo así de manifiesto el papel que juega la heterogeneidad en la convergencia.

3.1. Simulaciones numéricas

En esta sección presentamos algunas simulaciones numéricas para evaluar las consecuencias del subsidio en el reemplazo de bienes duraderos. Con este fin, inicialmente consideramos la función $\zeta(\theta)$ usada en Licandro y Sampayo (2006), calibrada a partir de datos agregados de reemplazo de automóviles en España. También

tomamos de aquel trabajo los siguientes valores numéricos para los parámetros del modelo.

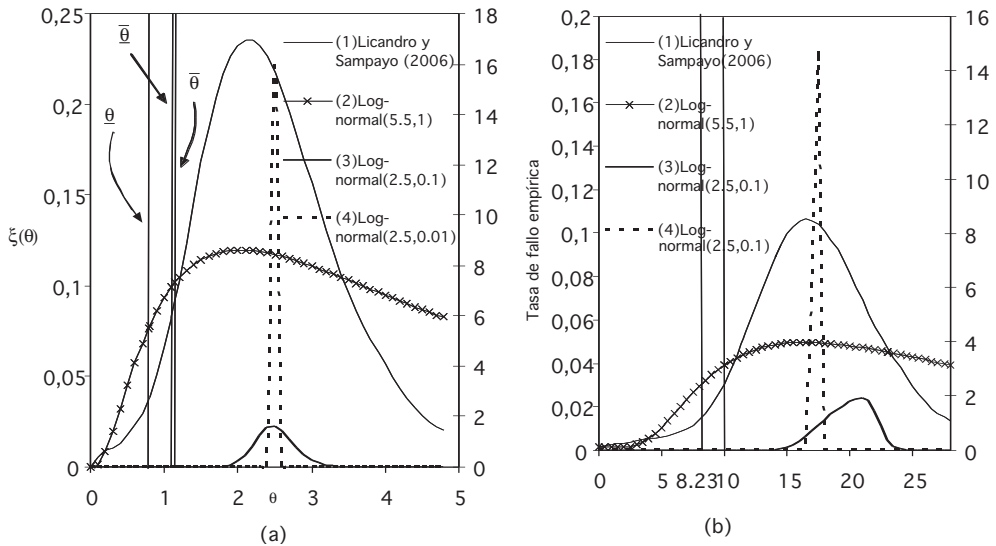
TABLA 1
VALORES DE LOS PARÁMETROS

ρ	p	d_0	d_1	γ	δ	n	$\bar{T}$	t_1
0,08	1	0,012	0,06	0,031	0,0014	0,04	10	2

A partir de esta simulación de base, modificamos $\zeta(\theta)$ y usamos una distribución log-normal variando la media y la desviación estándar, con el fin de ilustrar el efecto de la heterogeneidad en la dinámica de los reemplazos –véase Figura 2.

FIGURA 2

(a) FUNCIONES DE DENSIDAD DIFERENTES PARA LA DISTRIBUCIÓN DE TIPOS; (b) TASAS DE FALLO EMPÍRICAS PARA CADA FUNCIÓN DE DENSIDAD



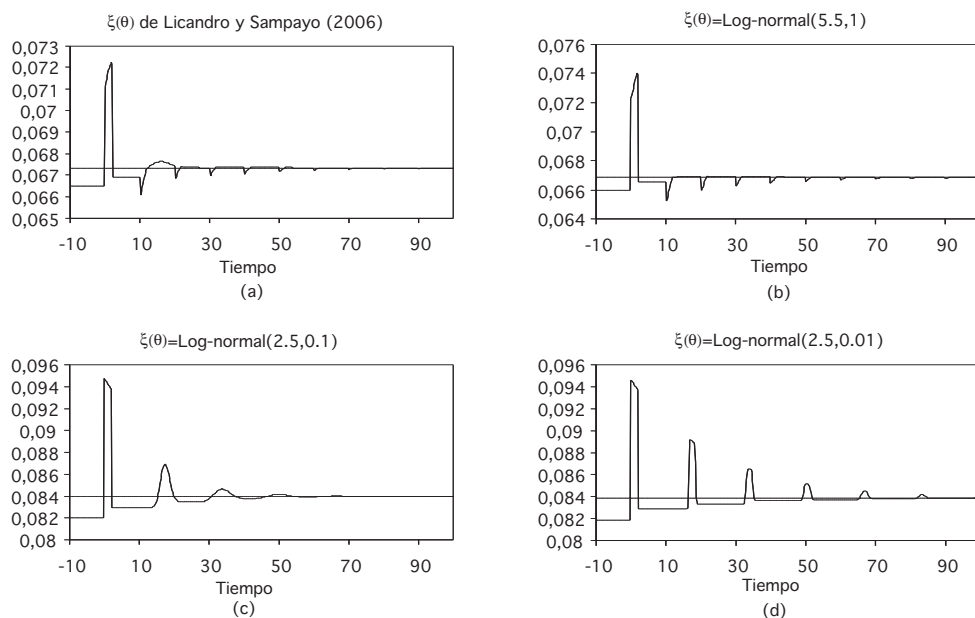
NOTA: Para ambos gráficos, las curvas (1) y (2) están medidas en el eje izquierdo y las curvas (3) y (4) están medidas en el eje derecho.

Los consumidores en el intervalo $[\theta, \bar{\theta}]$ retrasan la edad de reemplazo de su bien duradero desde un valor que, dependiendo del tipo, está entre 8,23 y 10 de manera que, para ese intervalo de edad, no deberían observarse más compras de bienes duraderos que las derivadas de roturas y las compras de los nuevos individuos. Nótese que, en los casos (1) y (2), hay una masa positiva de consumidores en el intervalo

$[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$, mientras que esa masa es nula en los otros casos. Además, las tasas de fallo empíricas (3) y (4) concentran una masa de probabilidad de reemplazo elevada alrededor del máximo, por lo que generarán ecos de reemplazo importantes. La Figura 3 muestra el resultado de estas simulaciones.

FIGURA 3

COMPRAS PER CÁPITA DE BIENES DURADEROS CON $n = 0,04$ Y $\delta = 0,014$. PARA DIFERENTES VALORES DE LA FUNCIÓN DE DENSIDAD DE TIPOS



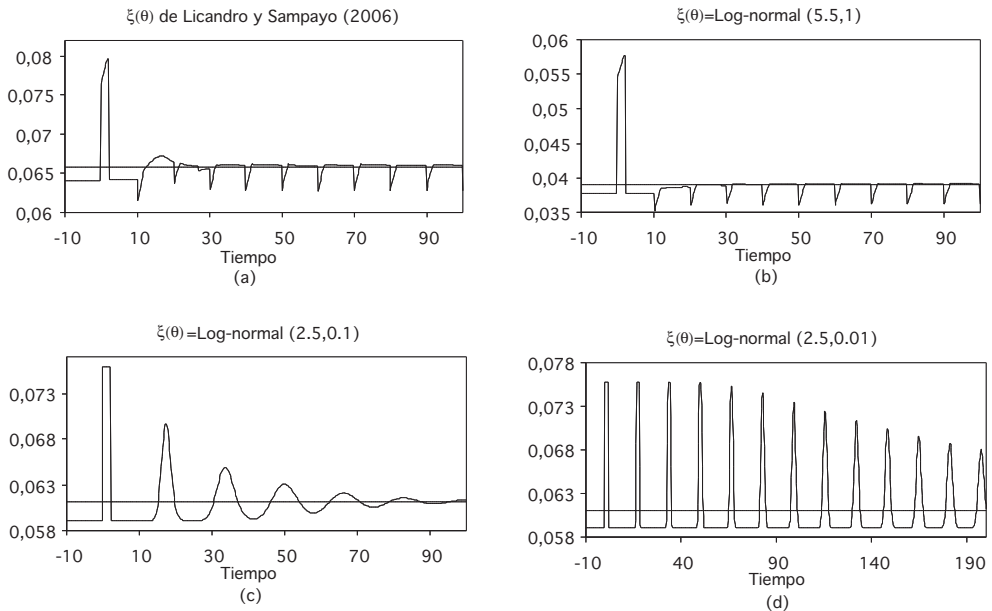
En las Figuras 3(a) y 3(b) observamos efectos de eco tanto negativos como positivos. Los primeros están relacionados con el comportamiento de los individuos en el intervalo $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$, que retrasan sus reemplazos en el momento de introducción del subsidio –de hecho, estos propietarios tienen una nueva edad de reemplazo de 10 años, pero nadie en este grupo posee un bien con esta edad, por lo que tienen que esperar a que los bienes alcancen esa edad–. Este retraso junto con su nueva edad de reemplazo se hacen notar a nivel agregado en el intervalo de tiempo $[10h, 10(h+1) - T_0(\underline{\theta})]$, $h = 1, 2, \dots$, cuando este grupo no tiene bienes para reemplazar, porque periodos atrás estaban retrasando su reemplazo. Es verdad que en este mismo intervalo de tiempo hay un incremento en las ventas derivado del efecto inicial del grupo $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$, pero el tamaño de los retrasos domina el efecto de los adelantos porque, tal y como se ve en la Figura 2(a), el grupo $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ tiene un menor tamaño para las funciones de densidad escogidas.

El efecto de eco positivo se genera por los adelantos en el reemplazo de los individuos tales que $\theta \in [\bar{\theta}, \theta_{\sup}^I)$. El comportamiento de estos individuos genera fluctuaciones endógenas agregadas con una periodicidad que depende de la correspondiente función de densidad de tipos. Además, en $[0, t_1)$ el adelanto en los reemplazos por parte de este grupo contrarresta y esconde el efecto negativo de los retrasos en el reemplazo.

Finalmente, la persistencia de las fluctuaciones endógenas positivas está inversamente relacionada con la heterogeneidad, tal como se aprecia comparando los diferentes gráficos. Sin embargo, dado que el subsidio elimina la heterogeneidad en el reemplazo en el intervalo de tipos $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$, la persistencia de los ecos negativos sólo se ve afectada por $\delta + n$. Ahora, todos los propietarios en este intervalo son idénticos porque su edad de reemplazo es 10, de forma que lo que ocurre inicialmente en cualquier $t \in [0, 10 - T_0(\underline{\theta})]$ se reproduce para siempre, a menos que este grupo tenga masa cero como en los casos (c) y (d)⁴, o el crecimiento de la población y las roturas ejerzan su papel suavizador como en los casos (a) y (d). Esto se ve claramente si comparamos las Figuras 3 y 4.

FIGURA 4

**COMPRAS PERCÁPITA DE BIENES DURADEROS CON $n = \delta = 0$,
PARA DIFERENTES FUNCIONES DE DENSIDAD DE TIPOS**



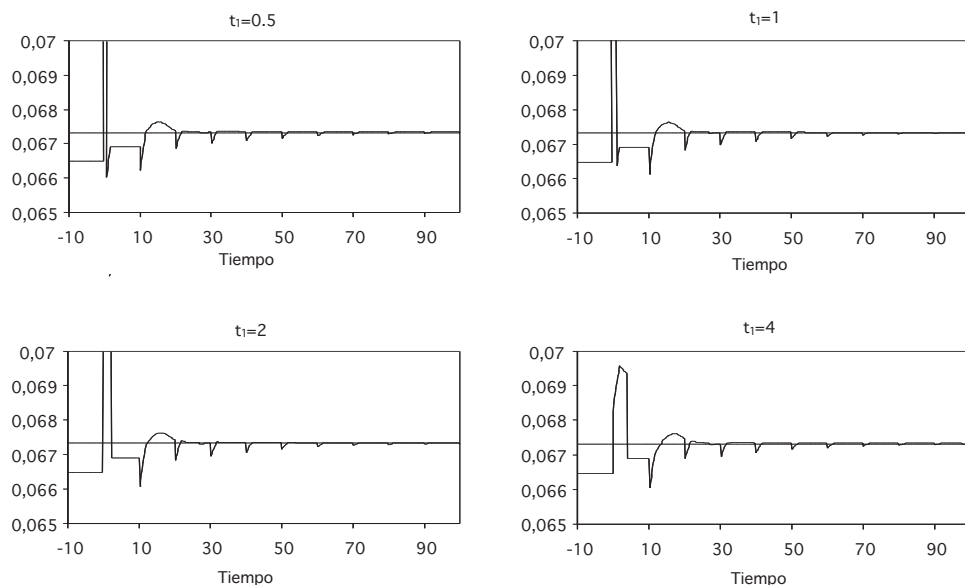
⁴ De hecho, esto impide la presencia de ecos negativos.

En la Figura 4, la persistencia de ecos positivos es mayor debido a que es sólo la heterogeneidad la que contribuye a suavizar las fluctuaciones, cuando eliminamos el crecimiento de la población y las roturas de bienes duraderos. Además, los casos (a) y (b) presentan fluctuaciones negativas perpetuas con periodicidad 10, evitando que exista convergencia al estado estacionario. Estas fluctuaciones no están presentes en los casos (c) y (d) debido a que la población que retrasa su reemplazo tiene medida casi nula.

Dada la elección arbitraria del periodo de ajuste inicial t_1 , realizamos un análisis de sensibilidad de los resultados con respecto a este parámetro. Las Figuras 5 y 6 muestran que un cambio en el periodo de ajuste inicial no afecta a la persistencia de las fluctuaciones endógenas, pero cuando la heterogeneidad es reducida como en el caso de la Figura 6, las fluctuaciones endógenas son tanto más importantes cuanto menor es el periodo de ajuste.

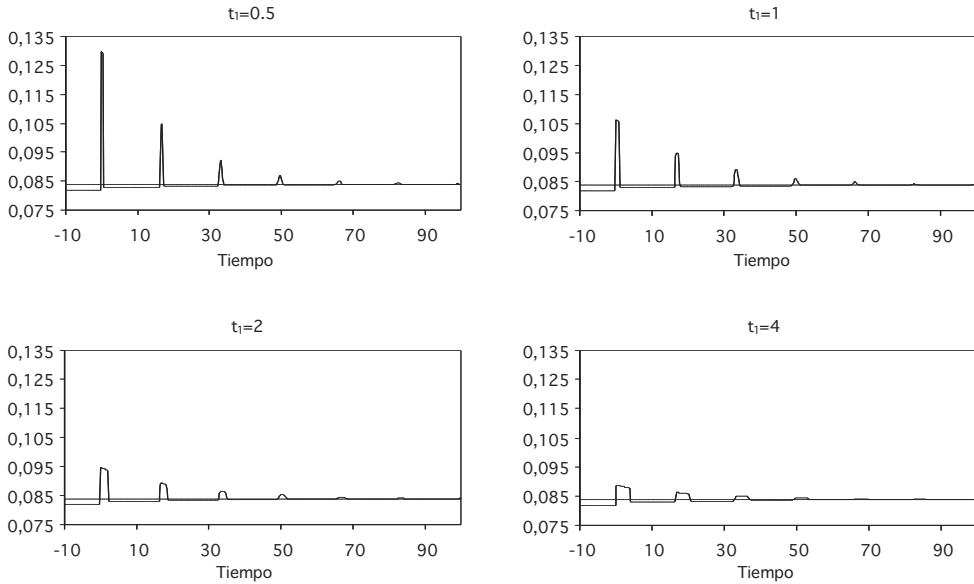
FIGURA 5

**DINÁMICA DE LAS COMPRAS PERCÁPITA DE BIENES DURADEROS,
PARA DIFERENTES VALORES DEL PERIODO INICIAL DE AJUSTE**



NOTA: La distribución de tipos usada es la misma que en LICANDRO y SAMPAYO (2006).

FIGURA 6
DINÁMICA DE LAS COMPRAS PERCÁPITA DE BIENES DURADEROS,
PARA DIFERENTES VALORES DEL PERIODO INICIAL DE AJUSTE,
CUANDO LA DISTRIBUCIÓN DE TIPOS ES LOG-NORMAL (2.5, 0.01)



4. Propagación dinámica de un subsidio temporal al reemplazo

Consideramos ahora un subsidio con las mismas características que en la sección precedente, pero su implementación es temporal, de forma que el subsidio está vigente durante un periodo de tiempo $[0, t_2)$, dado exógenamente. Para simplificar, suponemos que $t_2 < \bar{T}$ y $t_1 \leq t_2$.

Al igual que en el caso del subsidio permanente, la edad óptima de reemplazo se reduce de $T_0(\theta)$ a $T_1(\theta)$ para $\theta \geq \bar{\theta}$ y de $T_0(\theta)$ a $\bar{T}$ para $\theta \in [\bar{\theta}, \bar{\theta}]$. Este efecto incrementa inicialmente las compras en una cantidad dada por (7). Pero ahora, el subsidio solo está vigente hasta t_2 . Por lo tanto, entre t_0 y t_2 la dinámica de las compras es exactamente igual que con el subsidio permanente. Pero de t_2 en adelante difiere de forma que las compras agregadas convergen al estado estacionario inicial.

El comportamiento de los propietarios que retrasan su reemplazo cuando el subsidio entra en vigor, necesita ahora de un análisis más cuidadoso aun que antes. Por un lado, los individuos tales que $\theta \in [\bar{\theta}, \bar{\theta}]$, retrasan el reemplazo de sus bienes duraderos cuando el subsidio es introducido, por las mismas razones que en el caso del subsidio temporal. Sin embargo, algunos de estos bienes pueden no haber alcanzado la edad 10 cuando el subsidio desaparece en t_2 . En este caso, el retraso en el

reemplazo habrá resultado inútil. El análisis del caso permanente ha mostrado que, para los consumidores tales que $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$, el tiempo que ha de transcurrir para que puedan beneficiarse del subsidio es $\bar{T} - T_0(\theta)$, que está inversamente relacionado con θ . Por tanto, los propietarios que, después de retrasar el reemplazo, pueden beneficiarse del subsidio son aquellos tales $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$, donde $\underline{\theta}$ se define como $\bar{T} - T_0(\underline{\theta}) = t_2$. Además, después de que el subsidio desaparezca en t_2 , el comportamiento de los consumidores en el intervalo $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ genera un incremento de los reemplazos de la misma naturaleza que el efecto inicial en $t = 0$. Estos reemplazos, que denotamos por $R(\theta)$, pueden calcularse resolviendo la integral (2) con $m_0(\theta)$ con integrando y con límites $t - \bar{T}$ y $t - T_0(\theta)$, resultando

$$R(\theta) = \frac{e^{-(n+\delta)T_0(\theta)} - e^{-(n+\delta)\bar{T}}}{1 - e^{-(n+\delta)\bar{T}_0(\theta)}} \quad (13)$$

Los consumidores tales que $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$, que han retrasado el reemplazo inútilmente, también lo adelantan cuando desaparece el subsidio. Estos bienes tienen edad $T_0(\theta) + t_2$. Esto también genera un efecto inicial para este intervalo de individuos, que está dado por

$$R(\theta) = \frac{e^{-(n+\delta)T_0(\theta)} - e^{-(n+\delta)(T_0(\theta)+t_2)}}{1 - e^{-(n+\delta)T_0(\theta)}} \quad (14)$$

que resulta de integrar (2) también con $m_0(\theta)$ con integrando, pero con límites $t - (T_0(\theta) + t_2)$ y $t - T_0(\theta)$. Igual que anteriormente, asumimos que todas estas compras se distribuyen uniformemente en el intervalo temporal $[t_2, t_2 + t_1)$, esto es,

$$R(t, \theta) = \frac{R(\theta)}{t_1} \quad \text{para todo } t \in [t_2, t_2 + t_1)$$

En el instante t_2 , la edad óptima de reemplazo retorna a $T_0(\theta)$ para todo θ , y los consumidores de tipo $\theta \geq \bar{\theta}$ retrasan su reemplazo hasta que sus duraderos tengan una edad $T_0(\theta)$. Por tanto, para cada θ en este intervalo, las compras de bienes duraderos son igual a $\delta + n$ durante el periodo $[t_2, t_2 + T_0(\theta) - T_1(\theta)]$ —el periodo $[t_2, t_2 + T_0(\theta) - \bar{T}]$ para $\bar{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta}$. A partir de $t_2 + T_0(\theta) - T_1(\theta)$ las compras están determinadas por su valor pasado con periodicidad $T_0(\theta)$, y pueden computarse usando (3) con $T(\theta) = T_0(\theta)$ y sumándole los reemplazos generados por el efecto inicial dado por (8), con $T_0(\theta)$ en lugar de $T_1(\theta)$. Durante el intervalo temporal $[0, T_0(\theta))$ el resultado de esta suma es^{5,6}:

⁵ El hecho de que $\bar{T} \leq T_1(\theta) \leq T_0(\theta)$ para todo $\theta \geq \underline{\theta}$, junto con el supuesto de que $t_2 < \bar{T}$, garantizan que $t_2 - T_1(\theta) < 0$ tal y como establece la última línea en (15).

⁶ En la ecuación (15), $\bar{T}$ debe reemplazarse a $T_1(\theta)$ para $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$.

$$m(\theta, t) = \begin{cases} \delta + n + m_0(\theta)e^{-(\delta+n)T_1(\theta)} + \frac{I(t, \theta)}{t_1} & \text{si } t \in [0, t_1) \\ \delta + n + m_0(\theta)e^{-(\delta+n)T_1(\theta)} & \text{si } t \in (t_1, t_2) \\ \delta + n & \text{si } t \in [t_2, t_2 + T_0(\theta) - T_1(\theta)) \\ \delta + n + m_0(\theta)e^{-(\delta+n)T_0(\theta)} & \text{si } t \in [t_2 + T_0(\theta) - T_1(\theta), T_0(\theta)) \end{cases} \quad (15)$$

Como puede verse, existen discontinuidades en las compras como función de θ en t_1 , t_2 , $t_2 + T_0(\theta) - T_1(\theta)$ y $T_0(\theta)$ —con $\bar{T}$ en lugar de $T_1(\theta)$ para $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$. Todas estas discontinuidades se propagan en el tiempo, volviendo a ocurrir en $hT_0(\theta)$, $t_1 + hT_0(\theta)$, $t_2 + hT_0(\theta) - T_1(\theta)$ y $t_2 + hT_0(\theta)$, con $h = 1, 2, 3, \dots$ y $\theta \geq \bar{\theta}$ —en $hT_0(\theta)$, $t_2 + hT_0(\theta)$ y $t_2 + hT_0(\theta) - \bar{T}$ para $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ —, y deben tenerse en cuenta para la agregación.

En el instante t_2 los consumidores tales que $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ que habían retrasado su reemplazo a $\bar{T}$ lo adelantan a $T_0(\theta)$. Aquellos tales que $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ habiéndose beneficiado del subsidio y aquellos tales que $\theta \in [\underline{\theta}, \underline{\theta}]$ sin haberlo hecho. A partir de t_2 todos reemplazan con periodicidad $T_0(\theta)$. Las compras de estos consumidores en $t \in [0, t_2 + t_1)$ son:

1. Para $\theta \in [\underline{\theta}, \underline{\theta}]$

$$m(\theta, t) = \begin{cases} \delta + n & \text{si } t \in [0, t_2) \\ \delta + n + \left(m_0(\theta) + \frac{R(\theta)}{t_1} \right) & \text{si } t \in [t_2, t_2 + t_1) \\ \delta + n + m_0(\theta)e^{-(\delta+n)T_0(\theta)} & \text{si } t \in [t_2 + t_1, T_0(\theta)) \end{cases} \quad (16)$$

con $R(\theta)$ dado por (14). En t_2 , $t_2 + t_1$ y $T_0(\theta)$ hay discontinuidades en $m(\theta, t)$ como función de θ que se propagan en el tiempo, apareciendo otra vez en $t_2 + hT_0(\theta)$, $t_2 + t_1 + hT_0(\theta)$ y $hT_0(\theta)$, con $h = 1, 2, 3, \dots$

2. Para $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$

$$m(\theta, t) = \begin{cases} \delta + n & \text{si } t \in [0, \bar{T} - T_0(\theta)] \\ \delta + n + m_0(\theta)e^{-(\delta+n)\bar{T}} & \text{si } t \in [\bar{T} - T_0(\theta), t_2] \\ \delta + n + \left(m_0(\theta) + \frac{R(\theta)}{t_1}\right)e^{-(\delta+n)T_0(\theta)} & \text{si } t \in [t_2, t_2 + t_1] \\ \delta + n + m_0(\theta)e^{-(\delta+n)T_0(\theta)} & \text{si } t \in [t_2, t_1, T_0(\theta)] \end{cases} \quad (17)$$

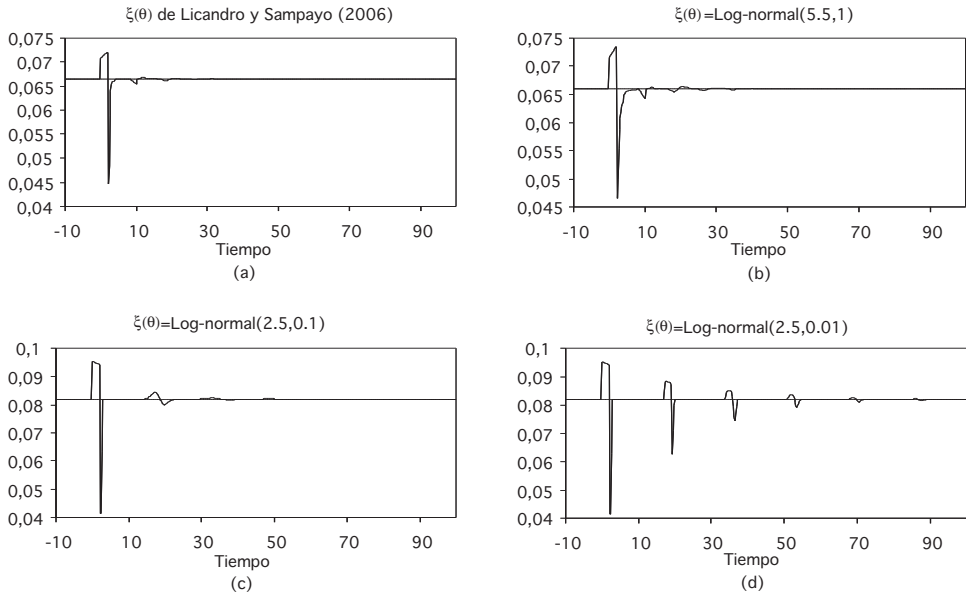
con $R(\theta)$ dado por (13). Aquí tenemos también discontinuidades en $m(\theta, t)$ en los momentos $\bar{T} - T_0(\theta)$, t_2 , $t_2 + t_1$ y $T_0(\theta)$, que reaparecen de nuevo en $hT_0(\theta) + \bar{T} - T_0(\theta)$, $t_2 + hT_0(\theta)$, $t_2 + t_1 + hT_0(\theta)$ y $hT_0(\theta)$, con $h = 1, 2, 3, \dots$

Igual que en el caso permanente, siempre que $\delta + n > 0$, podemos ver fácilmente que $m(\theta, t)$ converge al valor de estado estacionario conforme h va a infinito. Si $\delta + n = 0$, usaremos las simulaciones numéricas para verificar la convergencia a nivel agregado.

4.1. Simulaciones numéricas

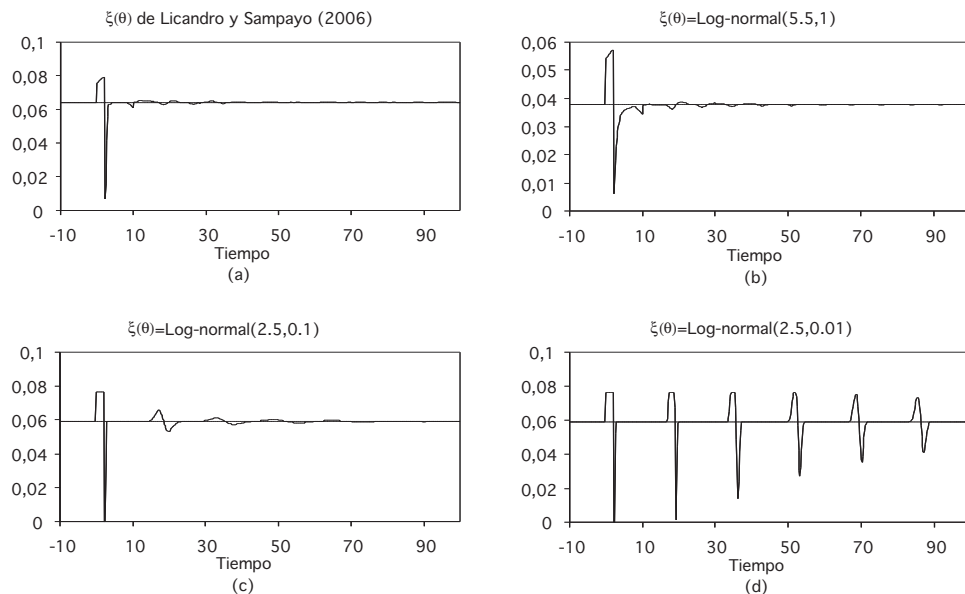
En esta sección tomamos los mismos parámetros que en el caso del subsidio permanente. Además, suponemos que $t_1 = t_2 = 2$. Aunque este es un supuesto arbitrario, hemos realizado un análisis de sensibilidad con respecto a él que proporciona resultados similares, por lo que evitamos su inclusión en el artículo. La Figura 7 muestra las simulaciones para $n + \delta > 0$.

FIGURA 7
COMPRAS PERCÁPITA DE BIENES DURADEROS CON UN SUBSIDIO
AL REEMPLAZO EN $t \in [0, 2)$



Aunque los comentarios que hemos realizado en el caso del subsidio permanente se aplican también a este caso, es preciso hacer alguna puntualización. Primero, tal como muestra la Figura 7, las compras agregadas convergen al estado estacionario y de forma que la reducción en las compras de bienes duraderos con posterioridad a t_2 , contrarresta totalmente el efecto positivo inicial en las compras que tuvo lugar en el intervalo $[0, t_1)$. Segundo, la reducción en las compras no tiene lugar en $t \in [10h, 10(h+1) - T_0(\underline{\theta})]$, $h = 1, 2, \dots$, sino que ocurre en $t \in [t_2 + h10, t_2 + hT_0(\theta_{\sup}^1) - T_1(\theta_{\sup}^1)]$ para cada consumidor de tipo $\theta \geq \bar{\theta}$, y la magnitud de esta reducción a nivel agregado depende de la distribución de tipos. Este *agujero* en las compras agregadas está provocado por el retraso en el reemplazo de aquellos propietarios que retrasan su reemplazo por algún tiempo después de t_2 , para permitir a sus duraderos alcanzar la nueva edad de reemplazo. Ahora existe convergencia incluso cuando $n + \delta = 0$, tal y como muestra la Figura 8. La razón es que sin subsidio, todos los propietarios, incluyendo los tipos $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$, tienen un comportamiento heterogéneo en términos de edad de reemplazo, y esto es suficiente para generar convergencia.

FIGURA 8
COMPRAS PERCÁPITA DE BIENES DURADEROS CON UN SUBSIDIO
AL REEMPLAZO EN $t \in [0, 2)$, CUANDO $n + \delta = 0$



Finalmente, nuestro análisis permite conjeturar que una reducción en la edad mínima necesaria para poder acceder al subsidio⁷, puede ser poco eficaz dado que estaría en gran medida compensando el retraso en el reemplazo inducido por el subsidio original, y además generaría el retraso adicional de otros propietarios.

5. Conclusiones

Hemos utilizado un modelo de reemplazo de bienes duraderos, con heterogeneidad en las preferencias de los consumidores, para analizar la propagación dinámica de un subsidio al reemplazo de bienes duraderos que son enviados a desguace y reemplazados por otros nuevos. La política es implementada en un estado estacionario y da lugar a fluctuaciones endógenas a lo largo de la transición al estado estacionario. La heterogeneidad en los consumidores es determinística, de forma

⁷ Los programas de subsidio al reemplazo implementados en algunos países tuvieron dos fases. Este es el caso, por ejemplo, del Plan Renove español. En su primera fase, de marzo a octubre de 1994, el subsidio beneficiaba a propietarios de coches de edad mayor de 10 años, que fuesen enviados a desguace y reemplazados por uno nuevo. En una segunda fase, de octubre de 1994 a junio de 1995, el subsidio se aplicó a reemplazos de coches de más de 7 años (véase LICANDRO y SAMPAYO, 2006).

que identificamos a cada propietario con una edad de reemplazo, y los reemplazos agregados están directamente relacionados con la distribución de preferencias. Este rasgo, junto con el carácter temporal o permanente del subsidio, juegan un rol fundamental para explicar la evolución de los reemplazos. Varias conclusiones merecen ser destacadas.

Primero, la reducción en la edad de reemplazo, incrementa de manera importante los reemplazos de bienes duraderos en el momento de la introducción del subsidio. Este incremento inicial se reproduce en el futuro con un patrón cíclico (lo que llamamos ecos de reemplazo), y el tamaño de estos ciclos está inversamente relacionado con la heterogeneidad en los consumidores, así como con el crecimiento de la población y la tasa de roturas de los bienes duraderos. Todos estos factores contribuyen a suavizar los ciclos de reemplazo. Además, la heterogeneidad de los consumidores, genera una convergencia oscilatoria al nuevo estado estacionario.

Segundo, la exigencia de que el bien desguazado tenga una edad mínima para poder acceder al subsidio, elimina la heterogeneidad en la edad de reemplazo para un grupo de consumidores, y por lo tanto atenúa el papel que juega la heterogeneidad en la eliminación de los ecos de reemplazo. La influencia de este hecho para las compras agregadas de bienes duraderos, está directamente relacionado con la importancia relativa de este grupo de consumidores sobre el total.

Sin embargo, la dinámica analizada en este trabajo es de una naturaleza excesivamente mecánica, fruto de la interacción entre las decisiones individuales de reemplazo y una heterogeneidad exógena. No analizamos el papel que juegan los mercados en la propagación dinámica del subsidio. Entre esos mercados ausentes en nuestro análisis, cabe destacar el mercado secundario de bienes duraderos. Aunque la introducción de este mercado aumentaría el realismo de modelo, este mercado debería funcionar de forma no eficiente para que su consideración produjese alguna conclusión de interés. Si el mercado secundario fuese eficiente y los consumidores suficientemente heterogéneos, los duraderos cambiarían continuamente de propietario –véase Rust, 1985–, y un subsidio al desguace como el considerado aquí no tendría ningún efecto, ya que nadie mantendría un duradero desde su adquisición cuando es nuevo hasta su desguace.

Por otra parte, el supuesto de utilidad lineal que estamos manejando, no permite analizar el papel que el reemplazo de los bienes duraderos puede jugar para suavizar el consumo de los bienes no duraderos. Sobre esta cuestión la literatura ha analizado casos que podríamos llamar extremos. Por un lado, Adda y Cooper (2000) construyen un modelo de reemplazo con una restricción de liquidez total, dado que los consumidores no pueden ni prestar ni pedir prestado. Por otro lado, en Leahy y Zeira (2005) no hay límite al crédito pero los consumidores compran un bien duradero una única vez, y por lo tanto no hay reemplazo de forma que la única decisión es cuando comprar. La consideración de un modelo con reemplazo, restricciones de liquidez intermedias y utilidad cóncava, puede ser un marco de análisis fructífero que contribuya a explicar la evolución cíclica del consumo.

Referencias bibliográficas

- [1] ADDA, J. y COOPER, R. (2000): «Balladurette and Juppette: a discrete analysis of scrapping subsidies», *Journal of Political Economy*, 108 (4).
- [2] BOUCEKKINE, R.; GERMAIN, M. y LICANDRO, O. (1997): «Replacement echoes in the vintage capital growth model», *Journal of Economic Theory*, 74 (2), 333-348.
- [3] BOUCEKKINE, R.; GERMAIN, M.; LICANDRO, O. y MAGNUS, A. (1998): «Creative destruction, investment volatility, and the average age of capital», *Journal of Economic Growth*, 3, 361-384.
- [4] FONTANA, M. (1999): «Improving the environmental performance of vehicles: fleet renewal and scrappage schemes». Report for the European Conference of Ministers of Transport.
- [5] LEAHY, J. V. y ZEIRA, J. (2005): «The timing of purchases and aggregate fluctuations», *Review of Economic Studies*, 72, 1127-1151.
- [6] LICANDRO, O. y SAMPAYO, A. R. (2006): «The effects of replacement schemes on car replacement: the Spanish case», *Investigaciones Económicas*, 30 (2), 239-282.
- [7] RUST, J. (1985): «Stationary equilibrium in a market for durable assets», *Econometrica*, 53 (4), 783-805.

APÉNDICE

Resumen

En este apéndice técnico se detalla la dinámica de las compras agregadas de bienes duraderos que son objeto de estudio en este trabajo.

A. La dinámica de las compras agregadas de bienes duraderos: el caso de un subsidio permanente

En este apéndice se computa la dinámica de las compras agregadas de bienes duraderos, en respuesta a un subsidio permanente, analizada en la sección 3.

Para computar las compras agregadas, se integra sobre θ la función $m(\theta, t)$ teniendo en cuenta las discontinuidades. También debemos tener en cuenta que las decisiones óptimas de reemplazo establecen una cota superior para θ que se denota por $\theta_{\sup}^1$. Esta cota define el ciclo de reemplazo más elevado. Sea ce_1 el primer entero igual o superior a $\frac{t}{T_1(\theta_{\sup}^1)}$. La mayor edad de reemplazo en t , de un bien que fue

reemplazado en $t = 0$ es $T(t) = \theta_1^{-1} \left(\frac{t}{ce_1} \right)$. Para cualquier $t \in [(h-1)\bar{T}, h\bar{T})$ y $h = 2, 3, \dots$, integrar la ecuación (8) sobre θ da lugar a:

$$I(t) = e^{-(n+\delta)t} \sum_{j=ce_1}^{h-1} \int_{\max\{\bar{\theta}, \theta_1\left(\frac{t-t_1}{j}\right)\}}^{\theta_1\left(\frac{t_1}{j}\right)} \frac{I(\theta)}{t_1} \zeta(\theta) d\theta \quad (A.1)$$

En cada instante $t \in [(h-1)\bar{T}, h\bar{T})$ están siendo reemplazados los bienes duraderos poseídos por consumidores que se acogieron al subsidio por primera vez en $t \in [0, t_1)$ y tales que

$$\theta \in \left[\theta_1\left(\frac{t}{j}\right), \left(\frac{t-t_1}{j}\right) \right] \text{ con } j = ce_1, ce_1 + 1, \dots, h = 1$$

Además, en $t = h\bar{T}$ debemos sumar

$$e^{-(n+\delta)t} \int_{\bar{\theta}}^{\bar{\theta}} \frac{I(\theta)}{t_1} \zeta(\theta) d\theta$$

a la ecuación (A.1), para así tener en cuenta que los reemplazos de los consumidores tales que $\theta \in [\bar{\theta}, \bar{\theta}]$, tienen lugar todos al mismo tiempo. Esta propagación del efecto inicial genera una discontinuidad en las compras para algunos valores de θ , definiendo de esta manera diferentes intervalos de consumidores en términos de sus

decisiones de reemplazo como consecuencia del subsidio. Los puntos de discontinuidad son $\underline{\theta}$, $\theta = \max \{ \theta_0, (h\bar{T} - t), \underline{\theta} \}$ y $\theta = \theta_1(1/j)$ con $j = ce_1, 2, 3, \dots, h$. Esto nos obliga a subdividir el intervalo de integración $[0, \theta_{\max}^1)$ para tener en cuenta estas discontinuidades. Las compras agregadas son:

1. Para $t \in [0, t_1)$,

$$\begin{aligned} m(t) = & \int_0^{\underline{\theta}} m_0(\theta) \zeta(\theta) d\theta + \int_{\underline{\theta}}^{\theta_0(\bar{T}-t)} (\delta + n) \zeta(\theta) d\theta \\ & + \int_{\theta_0(\bar{T}-t)}^{\bar{\theta}} (\delta + n + m_0(\theta) e^{-(n+\delta)\bar{T}}) \zeta(\theta) d\theta \\ & + \int_{\underline{\theta}}^{\theta_{\max}^1} (\delta + n + m_0(\theta) e^{-(n+\delta)T_1(\theta)}) \zeta(\theta) d\theta \\ & + e^{-(n+\delta)t} \int_{\bar{\theta}}^{\theta_{\max}^1} \frac{I(\theta)}{t_1} \zeta(\theta) d\theta \end{aligned}$$

2. Para $t \in [t_1, \bar{T})$,

$$\begin{aligned} m(t) = & \int_0^{\underline{\theta}} m_0(\theta) \zeta(\theta) d\theta + \int_{\underline{\theta}}^{\theta_0(\bar{T}-t)} (\delta + n) \zeta(\theta) d\theta \\ & + \int_{\theta_0(\bar{T}-t)}^{\bar{\theta}} (\delta + n + m_0(\theta) e^{-(n+\delta)\bar{T}}) \zeta(\theta) d\theta \\ & + \int_{\bar{\theta}}^{\theta_{\max}^1} (\delta + n + m_0(\theta) e^{-(n+\delta)T_1(\theta)}) \zeta(\theta) d\theta \end{aligned}$$

3. Para $t \in [\bar{T}, \bar{T} + t_1)$,

$$\begin{aligned} m(t) = & m_2(t) + e^{-(n+\delta)t} \int_{\max\{\bar{\theta}, \theta_1(t-t_1)\}}^{\theta_1} \frac{I(\theta)}{t_1} \zeta(\theta) d\theta \\ & + e^{-(n+\delta)t} \int_{\bar{\theta}}^{\bar{\theta}} \frac{I(\theta)}{t_1} \zeta(\theta) d\theta \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 m_2(t) = & \int_0^{\underline{\theta}} m_0(\theta) \zeta(\theta) d\theta \\
 & + \int_{\underline{\theta}}^{\max\{\theta_0(2\bar{T}-t), \underline{\theta}\}} \left((\delta + n) \sum_{i=0}^1 e^{-i(n+\delta)\bar{T}} \right) \zeta(\theta) d\theta \\
 & + \int_{\max\{\theta_0(2\bar{T}-t), \underline{\theta}\}}^{\underline{\theta}} \left((\delta + n) \sum_{i=0}^1 e^{-i(n+\delta)\bar{T}} + m_0(\theta) e^{-2(n+\delta)\bar{T}} \right) \zeta(\theta) d\theta \\
 & + \int_{\underline{\theta}}^{\theta_1(t)} \left((\delta + n) \sum_{i=0}^1 e^{-i(n+\delta)T_1(\theta)} + m_0(\theta) e^{-2(n+\delta)T_1(\theta)} \right) \zeta(\theta) d\theta \\
 & + \int_{\theta_1(t)}^{\theta_1^{\max}} (\delta + n + m_0(\theta) e^{-(n+\delta)T_1(\theta)}) \zeta(\theta) d\theta
 \end{aligned}$$

4. Para $t \in [\bar{T} + t_1, 2\bar{T})$,

$$m(t) = m_2(t) + e^{-(n+\delta)t} \int_{\theta_1(t-t_1)}^{\theta_1(t)} \frac{I(\theta)}{t_1} \zeta(\theta) d\theta$$

con $m_2(t)$ dado en el punto 3.

5. Para $t \in [(h-1)\bar{T}, (h-1)\bar{T} + t_1)$ y $h = \{2, 3, \dots\}$,

$$\begin{aligned}
 m(t) = & m_h(t) + e^{-(n+\delta)t} \sum_{j=ce_1}^{h-1} \int_{\max\{\bar{\theta}, \theta_1\left(\frac{t-t_1}{j}\right)\}}^{\theta_1\left(\frac{t}{j}\right)} \frac{I(\theta)}{t_1} \zeta(\theta) d\theta \\
 & + e^{-(n+\delta)t} \int_{\bar{\theta}}^{\bar{\theta}} \frac{I(\theta)}{t_1} \zeta(\theta) d\theta
 \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
 m_h(t) = & \int_0^{\underline{\theta}} m_0(\theta) \zeta(\theta) d\theta \\
 & + \int_{\underline{\theta}}^{\max\{\theta_0(h\bar{T}-t), \underline{\theta}\}} \left((\delta + n) \sum_{i=0}^{h-1} e^{-i(n+\delta)\bar{T}} \right) \zeta(\theta) d\theta \\
 & + \int_{\max\{\theta_0(h\bar{T}-t), \underline{\theta}\}}^{\bar{\theta}} \left((\delta + n) \sum_{i=0}^{h-1} e^{-i(n+\delta)\bar{T}} + m_0(\theta) e^{-h(n+\delta)\bar{T}} \right) \zeta(\theta) d\theta \\
 & + \int_{\bar{\theta}}^{\theta_1\left(\frac{t}{h-1}\right)} \left((\delta + n) \sum_{i=0}^{h-1} e^{-i(n+\delta)T_1(\theta)} + m_0(\theta) e^{-h(n+\delta)T_1(\theta)} \right) \zeta(\theta) d\theta \\
 & + \sum_{j=ce_1+1}^{h-1} \int_{\theta_1\left(\frac{t}{j}\right)}^{\theta_1\left(\frac{t}{j-1}\right)} \left((\delta + n) \sum_{i=0}^{j-1} e^{-i(n+\delta)T_1(\theta)} + m_0(\theta) e^{-j(n+\delta)T_1(\theta)} \right) \zeta(\theta) d\theta \\
 & + \int_{\theta_1\left(\frac{t}{ce_1}\right)}^{\theta_1^{\max}} \left((\delta + n) \sum_{i=0}^{ce_1-1} e^{-i(n+\delta)T_1(\theta)} + m_0(\theta) e^{-ce_1(n+\delta)T_1(\theta)} \right) \zeta(\theta) d\theta
 \end{aligned}$$

6. Para $t \in [(h-1)\bar{T} + t_1, h\bar{T})$ y $h = \{2, 3, \dots\}$,

$$m(t) = m_h(t) + e^{-(n+\delta)t} \sum_{j=ce_1+1}^{h-1} \int_{\theta_1\left(\frac{t-t_1}{j}\right)}^{\theta_1\left(\frac{t}{j}\right)} \frac{I(\theta)}{t_1} \zeta(\theta) d\theta$$

con $m_h(t)$ dado en el punto 5.

B. La dinámica de las compras agregadas: el caso del subsidio temporal

En esta sección del apéndice se detalla la dinámica de las compras de bienes duraderos presentada en la sección 4.

Primero, las compras de los propietarios tales que $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ se pueden computar recursivamente de (16):

1. Para $t \in [(h-1)T_0(\theta), (h-1)T_0(\theta) + t_2]$ y $h = \{1, 2, 3, \dots\}$,

$$m(\theta, t) = (\delta + n) \sum_{j=0}^{h-1} e^{-j(n+\delta)T_0(\theta)}$$

2. Para $t \in [(h-1)T_0(\theta) + t_2, t_2 + t_1 + (h-1)T_0(\theta)]$ y $h = \{1, 2, 3, \dots\}$,

$$m(\theta, t) = m_0(\theta)e^{-h(n+\delta)T_0(\theta)} \sum_{j=0}^{h-1} e^{-j(n+\delta)T_0(\theta)} + e^{-(n+\delta)(t-t_2)} \frac{R(\theta)}{t_1}$$

3. Para $t \in [t_2 + t_1 + (h-1)T_0(\theta), hT_0(\theta)]$ y $h = \{1, 2, 3, \dots\}$,

$$m(\theta, t) = m_0(\theta)e^{-h(n+\delta)T_0(\theta)} + (\delta + n) \sum_{j=0}^{h-1} e^{-j(n+\delta)T_0(\theta)}$$

Segundo, operando recursivamente en (17), obtenemos las compras para cada $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$:

1. Para $t \in [(h-1)T_0(\theta), (h-1)T_0(\theta) + \bar{T} - T_0(\theta)]$ y $h = \{1, 2, 3, \dots\}$,

$$m(\theta, t) = (\delta + n) \sum_{j=0}^{h-1} e^{-j(n+\delta)T_0(\theta)}$$

2. Para $t \in [(h-1)T_0(\theta) + \bar{T} - T_0(\theta), (h-1)T_0(\theta) + t_2]$ y $h = \{1, 2, 3, \dots\}$,

$$m(\theta, t) = m_0(\theta)e^{-(n+\delta)[T_1(\theta)+(h-1)T_0(\theta)]} + (\delta + n) \sum_{j=0}^{h-1} e^{-j(n+\delta)T_0(\theta)}$$

3. Para $t \in [(h-1)T_0(\theta) + t_2, t_2 + t_1 + (h-1)T_0(\theta)]$ y $h = \{1, 2, 3, \dots\}$,

$$m(\theta, t) = m_0(\theta)e^{-h(n+\delta)T_0(\theta)} + (\delta + n) \sum_{j=0}^{h-1} e^{-j(n+\delta)T_0(\theta)} + e^{-(n+\delta)(t-t_2)} \frac{R(\theta)}{t_1}$$

4. Para $t \in [t_2 + t_1 + (h-1)T_0(\theta), hT_0(\theta)]$ y $h = \{1, 2, 3, \dots\}$,

$$m(\theta, t) = m_0(\theta)e^{-h(n+\delta)T_0(\theta)} + (\delta + n) \sum_{j=0}^{h-1} e^{-j(n+\delta)T_0(\theta)}$$

En tercer lugar, operando recursivamente en (15) calculamos las compras para cada $\theta \geq \bar{\theta}^1$:

1. Para $t \in [(h-1)T_0(\theta), t_1 + (h-1)T_0(\theta)]$ y $h = \{1, 2, 3, \dots\}$,

$$m(\theta, t) = m_0(\theta)e^{-(n+\delta)[T_1(\theta)+(h-1)T_0(\theta)]} + (\delta + n) \sum_{j=0}^{h-1} e^{-j(n+\delta)T_0(\theta)} + e^{-(n+\delta)t} \frac{I(\theta)}{t_1}$$

2. Para $t \in [t_1 + (h-1)T_0(\theta), t_2 + (h-1)T_0(\theta)]$ y $h = \{1, 2, 3, \dots\}$,

$$m(\theta, t) = m_0(\theta)e^{-(n+\delta)[T_1(\theta)+(h-1)T_0(\theta)]} + (\delta + n) \sum_{j=0}^{h-1} e^{-j(n+\delta)T_0(\theta)}$$

3. Para $t \in [t_2 + (h-1)T_0(\theta), t_2 + (h-1)T_0(\theta) + T_0(\theta) + T_1(\theta)]$ y $h = \{1, 2, 3, \dots\}$,

$$m(\theta, t) = (\delta + n) \sum_{j=0}^{h-1} e^{-j(n+\delta)T_0}$$

4. Para $t \in [t_2 + (h-1)T_0(\theta) + T_0(\theta) - T_1(\theta), hT_0(\theta)]$ y $h = \{1, 2, 3, \dots\}$,

$$m(\theta, t) = m_0(\theta)e^{-h(n+\delta)T_0(\theta)} + (\delta + n) \sum_{j=0}^{h-1} e^{-j(n+\delta)T_0(\theta)}$$

A partir de $t = T_0(\theta)$ la dinámica es muy similar al caso del subsidio permanente, con el añadido de que ahora, los propietarios tales que $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ tienen un comportamiento heterogéneo y, cuando realicen su primer reemplazo –entre $t = T_0(\underline{\theta})$ y $t = T_0(\bar{\theta})$ –, el subsidio ya ha desaparecido.

Las compras agregadas las computamos integrando sobre θ , teniendo en cuenta las discontinuidades. Para aquellos tipos tales que $\theta \geq \bar{\theta}$ y que aparecen en (7), la dinámica está dada por (A.1) $\forall t \in ((h-1)\bar{T}, h\bar{T}]$, después de reemplazar $T_1(\theta)$ por $T_0(\theta)$ y ce_1 por ce_0^2 . Cuando el subsidio desaparece en t_2 , los propietarios tales que $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ desean adelantar su reemplazo tal y como se ha explicado en la sección 3, dando lugar al mismo problema que tuvimos en $t = 0$ para $\theta \geq \bar{\theta}$. Ahora, los reemplazos que desean ser adelantados están dados por (14) para $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ y por (13) para $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$. Dado que se supone que estos reemplazos se distribuyen uniformemente en el intervalo temporal $[t_2, t_2 + t_1]$, su propagación dinámica para $t \in [(h-1)\bar{T} + t_2 + t_1]$, con $h = 2, 4, \dots$, está caracterizada por

¹ Recuérdesse que estamos suponiendo que $t_1 \leq t_2 < \bar{T}$.

² Ahora, ce_0 define el primer entero igual o superior a $t/T_0(\theta_{\sup}^0)$.

$$R(t) = e^{-(n+\delta)(t-t_2)} \sum_{j=up_{\underline{\theta}}}^{h-1} \int_{\max\left(\min\left(\theta_0\left(\frac{t-t_2}{j}\right), \underline{\theta}\right), \underline{\theta}\right)}^{\max\left(\min\left(\theta_0\left(\frac{t-t_2}{j}\right), \underline{\theta}\right), \underline{\theta}\right)} \frac{R(\theta)}{t_1} \zeta(\theta) d\theta$$

para $\theta \in [\underline{\theta}, \underline{\theta}]$, y por

$$R(t) = e^{-(n+\delta)(t-t_2)} \sum_{j=up_{\bar{\theta}}}^{h-1} \int_{\min\left(\max\left(\theta_0\left(\frac{t-t_2}{j}\right), \underline{\theta}\right), \bar{\theta}\right)}^{\min\left(\max\left(\theta_0\left(\frac{t-t_2}{j}\right), \underline{\theta}\right), \bar{\theta}\right)} \frac{R(\theta)}{t_1} \zeta(\theta) d\theta$$

para $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$. Si denotamos por $up_{\underline{\theta}}$ y $up_{\bar{\theta}}$ el primer entero igual o superior a $\frac{t}{T_0(\underline{\theta})}$ y $\frac{t}{T_0(\bar{\theta})}$ respectivamente, y ambos juegan el mismo papel que ce_0 para el intervalo $[\underline{\theta}, \theta_{\sup}^0]$, las compras agregadas podemos escribirlas como:

1. Para $t \in [0, t_1)$,

$$\begin{aligned} m(t) = & \int_0^{\underline{\theta}} m_0(\theta) \zeta(\theta) d\theta + \int_{\underline{\theta}}^{\theta_0(\bar{T}-t)} (\delta + n) \zeta(\theta) d\theta \\ & + \int_{\theta_0(\bar{T}-t)}^{\bar{\theta}} (\delta + n + m_0(\theta) e^{-(n+\delta)\bar{T}}) \zeta(\theta) d\theta \\ & + \int_{\bar{\theta}}^{\theta_{\max}^0} (\delta + n + m_0(\theta) e^{-(n+\delta)T_1(\theta)}) \zeta(\theta) d\theta \\ & + \int_{\bar{\theta}}^{\theta_{\max}^0} (\delta + n + m_0(\theta) e^{-(n+\delta)T_1(\theta)}) \zeta(\theta) d\theta \\ & + \int_{\theta_{\max}^0}^{\theta_{\max}^1} (\delta + n + (\delta + n) e^{-(n+\delta)T_1(\theta)}) \zeta(\theta) d\theta \\ & + e^{-(n-\delta)t} \left(\int_{\underline{\theta}}^{\theta_{\max}^0} \frac{I(\theta)}{t_1} \zeta(\theta) d\theta + \int_{\theta_{\max}^0}^{\theta_{\max}^1} \frac{I(\theta)}{t_1} \zeta(\theta) d\theta \right) \end{aligned}$$

2. Para $t \in [t_1, t_2)$,

$$\begin{aligned}
 m(t) = & \int_0^{\underline{\theta}} m_0(\theta) \zeta(\theta) d\theta + \int_{\underline{\theta}}^{\theta_0(\bar{T}-t)} (\delta + n) \zeta(\theta) d\theta \\
 & + \int_{\theta_0(\bar{T}-t)}^{\bar{\theta}} (\delta + n + m_0(\theta) e^{-(n+\delta)\bar{T}}) \zeta(\theta) d\theta \\
 & + \int_{\bar{\theta}}^{\theta_{\max}^0} (\delta + n + m_0(\theta) e^{-(n+\delta)T_1(\theta)}) \zeta(\theta) d\theta \\
 & + \int_{\theta_{\max}^0}^{\theta_{\max}^1} (\delta + n + (\delta + n) e^{-(n+\delta)T_1(\theta)}) \zeta(\theta) d\theta
 \end{aligned}$$

3. Para $t \in [t_2, t_2 + t_1)$,

$$\begin{aligned}
 m(t) = & \int_0^{\underline{\theta}} m_0(\theta) \zeta(\theta) d\theta + \int_{\underline{\theta}}^{\theta^{**}} (\delta + n + m_0(\theta) e^{-(n+\delta)T_0(\theta)}) \zeta(\theta) d\theta \\
 & + \int_{\theta^{**}}^{\theta_{\max}^0} (\delta + n) \zeta(\theta) d\theta \\
 & + e^{-(n-\delta)(t-t_2)} \left(\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \frac{R(\theta)}{t_1} \zeta(\theta) d\theta + \int_{\bar{\theta}}^{\bar{\theta}} \frac{R(\theta)}{t_1} \zeta(\theta) d\theta \right)
 \end{aligned}$$

con $\theta^{**} = \min\{\max\{\bar{\theta}, \tilde{\theta}\}, \theta_{\sup}^0\}$, y $\tilde{\theta}$ es el tipo tal que $t = t_2 + T_0(\tilde{\theta}) - T_1(\tilde{\theta})$.

4. Para $t \geq t_2 + t_1$,

$$m(t) = m_0(t) + m_1(t) + m_2(t) + m_3(t) \quad (\text{B.2})$$

Los diferentes términos en la ecuación (B.2) son los siguientes. El primero, $m_0(t)$, representa las compras de propietarios tales que $\theta \in [0, \underline{\theta}]$, que no desean beneficiarse del subsidio y que vienen dados por

$$m_0(t) = \int_0^{\underline{\theta}} m_0(\theta) \zeta(\theta) d\theta$$

$m_1(t)$ denota las compras de consumidores tales que $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$, que retrasan su reemplazo inútilmente y, para corregir su error inesperado en t_2 , adelantan sus reemplazos uniformemente distribuidos sobre $[t_2, t_2 + t_1]$. Sea $\underline{T} = T_0(\bar{\theta})$. Entonces, las compras agregadas para este intervalo de tipos son:

a) Para $t \in [t_2 + t_1, \underline{T})$,

$$m_1(t) = \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} (\delta + n + m_0(\theta) e^{-(n+\delta)T_0(\theta)}) \zeta(\theta) d\theta$$

b) Para $t \in [\underline{T}, \underline{T} + t_2)$,

$$\begin{aligned} m_1(t) = & \int_{\underline{\theta}}^{\min\{\theta_0(t), \bar{\theta}\}} \left((\delta + n) \sum_{j=0}^1 e^{-(n+\delta)jT_0(\theta)} \right) \zeta(\theta) d\theta \\ & + \int_{\min\{\theta_0(t), \bar{\theta}\}}^{\bar{\theta}} (\delta + n + m_0(\theta) e^{-(n+\delta)T_0(\theta)}) \zeta(\theta) d\theta \end{aligned}$$

c) Para $t \in [\underline{T} + t_2, 2\underline{T})$,

$$\begin{aligned} m_1(t) = & \int_{\underline{\theta}}^{\min\{\theta_0(t-t_2), \bar{\theta}\}} \left((\delta + n) \sum_{j=0}^1 e^{-(n+\delta)jT_0(\theta)} + m_0(\theta) e^{-2(n+\delta)T_0(\theta)} \right) \zeta(\theta) d\theta \\ & + \int_{\min\{\theta_0(t-t_2), \bar{\theta}\}}^{\bar{\theta}} \left((\delta + n) \sum_{j=0}^1 e^{-(n+\delta)jT_0(\theta)} \right) \zeta(\theta) d\theta \\ & + \int_{\min\{\theta_0(t), \bar{\theta}\}}^{\bar{\theta}} ((\delta + n) + m_0(\theta) e^{-(n+\delta)T_0(\theta)}) \zeta(\theta) d\theta \\ & + e^{-(n+\delta)(t-t_2)} \int_{\min\{\max\theta_0(t-t_2-t_1), \bar{\theta}\}}^{\min\{\theta_0(t-t_2), \bar{\theta}\}} \frac{R(\theta)}{t_1} \zeta(\theta) d\theta \end{aligned}$$

d) Para $t \in [(h-1)\underline{T}, h\underline{T}]$ y $h = 3, 4, \dots$,

$$\begin{aligned}
 m_1(t) = & \int_{\underline{\theta}}^{\min\left\{\theta_0\left(\frac{t-t_2}{h-1}\right), \underline{\theta}\right\}} \left((\delta + n) \sum_{i=0}^{h-1} e^{-(n+\delta)iT_0(\theta)} + m_0(\theta)e^{-h(n+\delta)T_0(\theta)} \right) \zeta(\theta) d\theta \\
 + & \sum_{j=\min\{up_{\underline{\theta}}+1, h-1\}}^{h-1} \int_{\min\left\{\theta_0\left(\frac{t-t_2}{j}\right), \underline{\theta}\right\}}^{\min\left\{\theta_0\left(\frac{t-t_2}{j-1}\right), \underline{\theta}\right\}} \left((\delta + n) \sum_{i=0}^{j-1} e^{-(n+\delta)iT_0(\theta)} + m_0(\theta)e^{-j(n+\delta)T_0(\theta)} \right) \zeta(\theta) d\theta \\
 + & \sum_{j=\min\{up_{\underline{\theta}}, h-1\}}^{h-1} \int_{\min\left\{\theta_0\left(\frac{t-t_2}{j}\right), \underline{\theta}\right\}}^{\min\left\{\theta_0\left(\frac{t}{j}\right), \underline{\theta}\right\}} \left((\delta + n) \sum_{i=0}^j e^{-(n+\delta)iT_0(\theta)} \right) \zeta(\theta) d\theta \\
 + & \int_{\min\left\{\theta_0\left(\frac{t}{up_{\underline{\theta}}}\right), \underline{\theta}\right\}}^{\underline{\theta}} \left((\delta + n) \sum_{i=0}^{up_{\underline{\theta}}-1} e^{-(n+\delta)iT_0(\theta)} + m_0(\theta)e^{-(n+\delta)up_{\underline{\theta}}T_0(\theta)} \right) \zeta(\theta) d\theta \\
 + & e^{-(n+\delta)(t-t_2)} \sum_{j=\min\{up_{\underline{\theta}}, h-1\}}^{h-1} \int_{\min\left\{\max\left\{\theta_0\left(\frac{t-t_2-t_1}{j}\right), \underline{\theta}\right\}, \underline{\theta}\right\}}^{\min\left\{\theta_0\left(\frac{t-t_2}{j}\right), \underline{\theta}\right\}} \frac{R(\theta)}{t_1} \zeta(\theta) d\theta
 \end{aligned}$$

El término $m_2(t)$ en la ecuación (B.2) mide las compras de los individuos tales que $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$, que retrasan su reemplazo para beneficiarse del subsidio y pueden hacerlo. Sea $\underline{T} = T_0(\underline{\theta})$. Entonces, las compras agregadas para este subintervalo de propietarios son:

a) Para $t \in [t_2 + t_1, \underline{T}]$,

$$m_2(t) = \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} (\delta + n + m_0(\theta)e^{-(n+\delta)T_0(\theta)}) \zeta(\theta) d\theta$$

b) Para $t \in [\underline{T}, \underline{T} + t_2]$,

$$\begin{aligned}
 m_2(t) = & \int_{\underline{\theta}}^{\theta_0(t)} \left((\delta + n) \sum_{j=0}^1 e^{-(n+\delta)jT_0(\theta)} \right) \zeta(\theta) d\theta \\
 + & \int_{\theta_0(t)}^{\bar{\theta}} (\delta + n + m_0(\theta)e^{-(n+\delta)T_0(\theta)}) \zeta(\theta) d\theta
 \end{aligned}$$

c) Para $t \in [\underline{T} + t_2, 2\underline{T})$,

$$\begin{aligned}
 m_2(t) = & \int_{\underline{\theta}}^{\min\{\theta_0(t-t_2), \bar{\theta}\}} \left((\delta + n) \sum_{j=0}^1 e^{-(n+\delta)jT_0(\theta)} + m_0(\theta)e^{-(n+\delta)2T_0(\theta)} \right) \zeta(\theta) d\theta \\
 & + \int_{\min\{\theta_0(t-t_2), \underline{\theta}\}}^{\bar{\theta}} \left((\delta + n) \sum_{j=0}^1 e^{-(n+\delta)jT_0(\theta)} + m_0(\theta)e^{-(n+\delta)[T_0(\theta)+\bar{T}]} \right) \zeta(\theta) d\theta \\
 & + e^{-(n+\delta)(t-t_2)} \int_{\max\{\theta_0(t-t_2-t_1), \underline{\theta}\}}^{\theta_0(t-t_2)} \frac{R(\theta)}{t_1} \zeta(\theta) d\theta
 \end{aligned}$$

d) Para $t \in [2\underline{T}, 2\underline{T} + t_2)$,

$$\begin{aligned}
 m_2(t) = & \int_{\underline{\theta}}^{\theta_0\left(\frac{t}{2}\right)} \left((\delta + n) \sum_{j=0}^2 e^{-(n+\delta)jT_0(\theta)} \right) \zeta(\theta) d\theta \\
 & + \int_{\theta_0\left(\frac{t}{2}\right)}^{\min\{\theta_0(t-t_2), \bar{\theta}\}} \left((\delta + n) \sum_{j=0}^1 e^{-(n+\delta)jT_0(\theta)} + m_0(\theta)e^{-(n+\delta)2T_0(\theta)} \right) \zeta(\theta) d\theta \\
 & + \int_{\min\{\theta_0(t-t_2), \underline{\theta}\}}^{\bar{\theta}} \left((\delta + n) \sum_{j=0}^1 e^{-(n+\delta)jT_0(\theta)} + m_0(\theta)e^{-(n+\delta)[T_0(\theta)+\bar{T}]} \right) \zeta(\theta) d\theta
 \end{aligned}$$

e) Para $t \in [2\underline{T} + t_2, 3\underline{T})$,

$$\begin{aligned}
 m_2(t) = & \int_{\underline{\theta}}^{\min\left\{\theta_0\left(\frac{t-t_2}{2}\right), \bar{\theta}\right\}} \left((\delta + n) \sum_{j=0}^2 e^{-(n+\delta)jT_0(\theta)} + m_0(\theta)e^{-(n+\delta)3T_0(\theta)} \right) \zeta(\theta) d\theta \\
 & + \int_{\min\left\{\theta_0\left(\frac{t-t_2}{2}\right), \bar{\theta}\right\}}^{\theta_0(t-\bar{T})} \left((\delta + n) \sum_{j=0}^2 e^{-(n+\delta)jT_0(\theta)} + m_0(\theta)e^{-(n+\delta)[2T_0(\theta)\bar{T}]} \right) \zeta(\theta) d\theta \\
 & + \int_{\theta_0(t-\bar{T})}^{\min\left\{\theta_0\left(\frac{t}{2}\right), \bar{\theta}\right\}} \left((\delta + n) \sum_{j=0}^2 e^{-(n+\delta)jT_0(\theta)} \right) \zeta(\theta) d\theta \\
 & + \int_{\min\left\{\theta_0\left(\frac{t}{2}\right), \bar{\theta}\right\}}^{\bar{\theta}} \left((\delta + n) \sum_{j=0}^1 e^{-(n+\delta)jT_0(\theta)} + m_0(\theta)e^{-(n+\delta)2T_0(\theta)} \right) \zeta(\theta) d\theta \\
 & + e^{-(n+\delta)(t-t_2)} \sum_{j=1}^2 \int_{\min\left\{\max\left(\theta_0\left(\frac{t-t_2-t_1}{j}\right), \underline{\theta}\right), \bar{\theta}\right\}}^{\min\left\{\theta_0\left(\frac{t-t_2}{j}\right), \bar{\theta}\right\}} \frac{R(\theta)}{t_1} \zeta(\theta) d\theta
 \end{aligned}$$

f) Para $t \in [(h-1)\underline{T}, h\underline{T}]$ y $h = 4, 5, \dots$

$$\begin{aligned}
 m_2(t) = & \sum_{j=\min\{up_{\bar{\theta}}, h-1\}}^{h-1} \int_{\max\left\{\min\left\{\theta\left(\frac{t-\bar{T}}{j-1}\right), \bar{\theta}\right\}, \underline{\theta}\right\}}^{\max\left\{\min\left\{\theta\left(\frac{t-\bar{T}}{j-1}\right), \bar{\theta}\right\}, \underline{\theta}\right\}} (\delta + n) \sum_{i=0}^j e^{-(n+\delta)iT_0(\theta)} \zeta(\theta) d\theta \\
 & + \sum_{j=\min\{up_{\bar{\theta}}, h-1\}}^{h-1} \int_{\max\left\{\min\left\{\theta\left(\frac{t-t_2}{j}\right), \bar{\theta}\right\}, \underline{\theta}\right\}}^{\max\left\{\min\left\{\theta\left(\frac{t-\bar{T}}{j-1}\right), \bar{\theta}\right\}, \underline{\theta}\right\}} m_0(\theta) e^{-(n+\delta)[T_0(\theta)+jT_1(\theta)]} \zeta(\theta) d\theta \\
 & + \sum_{j=\min\{up_{\bar{\theta}}, h-1\}}^{h-1} \int_{\max\left\{\min\left\{\theta\left(\frac{t}{j}\right), \bar{\theta}\right\}, \underline{\theta}\right\}}^{\max\left\{\min\left\{\theta\left(\frac{t}{j}\right), \bar{\theta}\right\}, \underline{\theta}\right\}} \left((\delta + n) \sum_{i=0}^j e^{-(n+\delta)iT_0(\theta)} \right) \zeta(\theta) d\theta \\
 & + \sum_{j=\min\{up_{\bar{\theta}}, h-1\}}^{h-1} \int_{\max\left\{\min\left\{\theta\left(\frac{t-t_2}{j}\right), \bar{\theta}\right\}, \underline{\theta}\right\}}^{\max\left\{\min\left\{\theta\left(\frac{t-\bar{T}}{j-1}\right), \bar{\theta}\right\}, \underline{\theta}\right\}} (\delta + n) \sum_{i=0}^j e^{-(n+\delta)iT_0(\theta)} \zeta(\theta) d\theta \\
 & + \sum_{j=\min\{up_{\bar{\theta}}, h-1\}}^{h-1} \int_{\max\left\{\min\left\{\theta\left(\frac{t-t_2}{j}\right), \bar{\theta}\right\}, \underline{\theta}\right\}}^{\max\left\{\min\left\{\theta\left(\frac{t-t_2}{j-1}\right), \bar{\theta}\right\}, \underline{\theta}\right\}} m_0(\theta) e^{-(n-\delta)jT_0(\theta)} \zeta(\theta) d\theta \\
 & + e^{-(n+\delta)(t-t_2)} \sum_{j=\min\{up_{\bar{\theta}}, h-1\}}^{h-1} \int_{\min\left\{\max\left\{\theta\left(\frac{t-t_2-t_1}{j}\right), \bar{\theta}\right\}, \underline{\theta}\right\}}^{\min\left\{\theta\left(\frac{t-t_2}{j}\right), \bar{\theta}\right\}} \frac{R(\theta)}{t_1} \zeta(\theta) d\theta
 \end{aligned}$$

El último término $m_3(t)$ en la ecuación (B.2) se refiere a las compras de los tipos tales que $\theta \in [\bar{\theta}, \theta_{\text{sup}}^0]$, que adelantan su reemplazo como consecuencia del subsidio. Las compras agregadas para este grupo son:

a) Para $t \in [t_2 + t_1, \bar{T})$,

$$m_3(t) = \int_{\bar{\theta}}^{\theta_1^{**}} (\delta + n + m_0(\theta) e^{-(n-\delta)T_0(\theta)}) \zeta(\theta) d\theta \\ + \int_{\theta_1^{**}}^{\theta_{\text{sup}}^0} (\delta + n) \zeta(\theta) d\theta$$

con $\theta_1^{**} = \min\{\max\{\bar{\theta}, \tilde{\theta}_1\}, \theta_{\text{sup}}^0\}$, y siendo $\tilde{\theta}_1$ el tipo que resuelve la ecuación $t = t_2 + T_0(\theta_1) - T_1(\theta_1)$.

b) Para $t \in [\bar{T}, 2\bar{T})$,

$$m_3(t) = \int_{\bar{\theta}}^{\theta_2^{**}} \left(m_0(\theta) e^{-2(n+\delta)T_0(\theta)} + (\delta + n) \sum_{j=0}^1 e^{-j(n+\delta)T_0(\theta)} \right) \zeta(\theta) d\theta \\ + \int_{\theta_2^{**}}^{\theta_1^*} \left((\delta + n) \sum_{j=0}^1 e^{-j(n+\delta)T_0(\theta)} \right) \zeta(\theta) d\theta \\ + \int_{\theta_1^*}^{\theta_0(t)} \left(m_0(\theta) e^{-(n+\delta)[T_1(\theta)+T_0(\theta)]} + (\delta + n) \sum_{j=0}^1 e^{-j(n+\delta)T_0(\theta)} \right) \zeta(\theta) d\theta \\ + \int_{\theta_0(t)}^{\theta_1^{**}} (m_0(\theta) e^{-(n+\delta)T_0(\theta)} + (\delta + n)) \zeta(\theta) d\theta \\ + \int_{\theta_1^{**}}^{\theta_{\text{sup}}^0} (\delta + n) \zeta(\theta) d\theta + e^{-(n+\delta)t} \int_{\theta_0(t-t_1)}^{\theta_0(t)} \frac{I(\theta)}{t_1} \zeta(\theta) d\theta$$

θ_j^{**} , $j = 1, 2$, denota el tipo tal que $\theta_j^{**} = \min\{\max\{\bar{\theta}, \tilde{\theta}_j\}, \theta_{\text{sup}}^0\}$, siendo $\tilde{\theta}_j$ el tipo que resuelve la ecuación $t = t_2 + jT_0(\theta) - T_1(\theta)$.

c) Para $t \in [(h-1)\bar{T}, h\bar{T}]$ y $h = \{3, 4, \dots\}$,

$$\begin{aligned}
 m_3(t) = & \int_{\bar{\theta}}^{\theta_h^{**}} \left(m_0(\theta) e^{-(n+\delta)hT_0(\theta)} + (\delta+n) \sum_{j=0}^{h-1} e^{-j(n+\delta)T_0(\theta)} \right) \zeta(\theta) d\theta \\
 & + \sum_{j=\min\{ce_0+1, h-1\}}^{h-1} \int_{\theta_j^{**}}^{\theta_{j-1}^{**}} \left((\delta+n) \sum_{j=0}^{j-1} e^{-i(n+\delta)T_0(\theta)} \right) \zeta(\theta) d\theta \\
 & + \sum_{j=\min\{ce_0+1, h-1\}}^{h-1} \int_{\theta_j^*}^{\theta_0\left(\frac{t}{j}\right)} \left(m_0(\theta) e^{-(n+\delta)[T_1(\theta)+jT_0(\theta)]} + (\delta+n) \sum_{i=0}^{j-1} e^{-i(n+\delta)T_0(\theta)} \right) \zeta(\theta) d\theta \\
 & + \sum_{j=0}^{h-1} \int_{\theta_0\left(\frac{t}{j}\right)}^{\theta_j^{**}} \left(m_0(\theta) e^{-j(n+\delta)T_0(\theta)} + (\delta+n) \sum_{i=0}^{j-1} e^{-i(n+\delta)T_0(\theta)} \right) \zeta(\theta) d\theta \\
 & + \int_{\theta_1^{**}}^{\theta_{\sup}^0} (\delta+n) \zeta(\theta) d\theta \\
 & + e^{-(n+\delta)t} \sum_{j=\min\{ce_0, h-1\}}^{h-1} \int_{\theta_0\left(\frac{t-t_1}{j}\right)}^{\theta_0\left(\frac{t}{j}\right)\min\{ce_0, h-1\}} \frac{R(\theta)}{t_1} \zeta(\theta) d\theta
 \end{aligned}$$

θ_j^{**} se define como $\theta_j^{**} = \min\{\max\{\bar{\theta}, \tilde{\theta}_j\}, \theta_{\sup}^0\}$ y $\tilde{\theta}_j$ resuelve $t = t_2 + jT_0(\theta) - T_1(\theta)$, con $j = ce_0, \dots, h-1$. Además, $\theta_{j-1}^* = \min\{\max\{\theta_{j-1}^*, \bar{\theta}\}, \theta_{\sup}^0\}$ y $\theta_{j-1}^* = \theta_0\left(\frac{t-t_2}{j-1}\right)$. Para computar $\tilde{\theta}_j$ debemos resolver en θ la siguiente ecuación lineal:

$$t = t_2 + jT_0(\theta) - T_1(\theta), \quad j = ce_0, \dots, h$$

El resto de los valores deben calcularse invirtiendo numéricamente la función $T(\theta)$.