Crecimiento endógeno, utilización del capital y depreciación*

Juana Aznar-Márquez
Universitat Miguel Hernández d'Elx

J. Ramón Ruiz-Tamarit
Universitat de València
Departament d'Anàlisi Econòmica
Université Catholique de Louvain-IRES

Resumen

En este trabajo estudiamos una versión ampliada del modelo de crecimiento AK que incorpora costes de ajuste y de mantenimiento del capital. Los agentes pueden subutilizar el capital instalado y variar la tasa de depreciación. De entre los resultados obtenidos destacamos que los costes de ajuste y de mantenimiento reducen la inversión, la depreciación, la utilización del capital así como la tasa de crecimiento, mientras que un aumento en la eficiencia productiva tiene el efecto inverso sobre las citadas variables. Por otra parte, la impaciencia de los agentes reduce la tasa de crecimiento pero aumenta la depreciación y la utilización del capital. La depreciación y la utilización del capital dependen negativamente de la tasa de crecimiento de la población.

Palabras clave*: mantenimiento, depreciación, utilización del capital, crecimiento endógeno.*
Clasificación JEL: *O40, E22, D90.*

Abstract

We study an extended version of the one-sector AK growth model introducing adjustment and maintenance costs. Agents are allowed to under-use the installed capital and to vary the depreciation rate. The model is analyzed using particular functional forms and it is solved in closed-form. We find that adjustment and maintenance costs (efficiency) reduce (increase) investment, depreciation, capital utilization as well as the rate of growth. Impatience reduces the rate of growth but increases depreciation and utilization. Depreciation and utilization depend negatively on the rate of population growth.

Keywords: *maintenance, depreciation, capital utilization, endogenous growth.*
JEL classification: *O40, E22, D90.*

* Los autores agradecen los comentarios recibidos de R. Boucekkine y O. Licandro. Los autores agradecen el apoyo del Belgian Research Programme ARC 03/08-302 y la ayuda financiera de la CICYT española, proyectos SEC99-0820, SEC2000-0260 y SEJ2004-04579/ECON. Ruiz-Tamarit también agradece la ayuda PR2003-0107 de la Secretaría de Estado y Universidades, MECD de España.

1. Introducción

En el modelo de crecimiento neoclásico estándar la decisión de cuánto ahorrar se basa en la comparación, en términos de bienestar, entre los costes y los beneficios de un mayor consumo presente frente al consumo futuro. Siendo esto así, la inversión juega un papel totalmente pasivo. En dicho modelo se supone plena utilización del capital y una tasa de depreciación determinada exógenamente como una proporción constante del stock de capital. Estos supuestos sin embargo no parece que se ajusten a la realidad observable mostrada por los datos. Las empresas no siempre deciden utilizar plenamente el capital que tienen instalado y además pueden influir en la tasa de depreciación del stock de capital. La forma en que las empresas pueden afectar a la tasa de depreciación es dedicando recursos a la conservación, es decir, a la reparación y al mantenimiento del stock de capital que se ha deteriorado por el uso en el proceso de producción o por simple envejecimiento.

McGrattan y Schmitz (1999) muestran la relevancia cuantitativa de las actividades de reparación y mantenimiento en Canadá, para el período 1961-1993, ya que cerca del 6 por 100 del producto nacional bruto se destinó a la reparación y el mantenimiento del capital, lo que supone aproximadamente la mitad del gasto realizado en la adquisición de nuevos bienes de capital. Por otra parte, Gylfason and Zoega (2001), utilizando datos del Banco Mundial, estudian la relación entre depreciación y crecimiento. Entre sus resultados destacamos que: i) un aumento del crecimiento de la población acelera la depreciación, ii) una mayor eficiencia productiva aumenta la depreciación y iii) un mayor crecimiento a largo plazo también aumenta la depreciación.

A pesar de la evidencia empírica mostrada en el párrafo anterior, la teoría del crecimiento ha relegado la tasa de depreciación a ser un parámetro exógeno, que en el caso de los modelos neoclásicos, afecta negativamente en el largo plazo al nivel de las variables y en el corto plazo a las tasas de crecimiento; mientras que en los modelos de crecimiento endógeno afecta también a la tasa de crecimiento de largo plazo. En este trabajo examinamos los determinantes tanto de la depreciación como del crecimiento, en el contexto de un modelo de crecimiento de un único sector en el que se combina una tecnología lineal de producción con costes de ajuste y de mantenimiento del capital. Los agentes pueden subutilizar el capital instalado así como variar la tasa de depreciación. Por lo tanto, en esta economía los agentes deciden endógenamente la cantidad de recursos que se dedican a la acumulación de nuevas unidades de capital y a las actividades de reparación y mantenimiento. Esta última decisión está relacionada con la endogeneidad de la tasa de utilización del capital y de la tasa de depreciación.

La cuestión del mantenimiento del capital, que permite romper la hipótesis de una tasa de depreciación constante y exógena incluso en ausencia de obsolescencia, se ha dejado de lado durante muchos años después de las contribuciones seminales de los años 70 del siglo pasado. Sin embargo, durante este período se han realizado intentos de reintroducir la variabilidad de la tasa de depreciación a través de la hipótesis *Depreciation-in-Use*. Es decir, la hipóstesis de causalidad que conecta biunívocamente elevadas (bajas) tasas de utilización del capital frecuentemente asociadas a altos (bajos) niveles de actividad económica con altas (bajas) tasas de depreciación. Esta hipótesis se ha incorporado a estudios microeconómicos a nivel de empresa (Epstein y Denny, 1980; Bischoff y Kokkelenberg, 1987; Motahar, 1992; Johnson, 1994), así como a otros en el campo de la macroeconomía relativos a la teoría neoclásica del crecimiento (Rumbos y Auernheimer, 2001) y también de la teoría del ciclo real (Burnside y Eichenbaum, 1996). Aun cuando la tasa de depreciación se considera una variable endógena, este enfoque no es satisfactorio puesto que sigue asignando un papel residual a la depreciación del capital. Recientemente, la anterior hipótesis se ha ampliado incluyendo las actividades de mantenimiento de manera que la tasa de depreciación se considera como una variable de decisión similar a la tasa de utilización del capital. Así encontramos ejemplos a nivel de empresa (Boucekkine y Ruiz-Tamarit, 2003) y también a nivel agregado en la teoría neoclásica del crecimiento (Licandro, Puch y Ruiz-Tamarit, 2001) y en la teoría del ciclo real (Licandro y Puch, 2000; Collard y Kollintzas, 2000).

Como ya se ha mencionado previamente, los modelos de crecimiento de equilibrio general básicos, no permiten la separación de las decisiones de ahorro de las familias de las decisiones de inversión de las empresas. Sin embargo, incorporando costes de ajuste relacionados con la inversión bruta es posible superar el papel esencialmente pasivo de la inversión. En este trabajo partimos del modelo canónico de Rebelo (1991) al que incorporamos unas funciones de costes de ajuste y de mantenimiento con lo que la función objetivo queda modificada de forma sustancial. En modelos de crecimiento con un único sector, considerar una tecnología lineal facilita la modelización, directa o asintótica, del fenómeno del crecimiento endógeno. Queremos comprobar si la introducción de las mencionadas funciones de costes en el modelo rompe el enlace previo. En este contexto, la depreciación ya no es una variable residual. Junto con la inversión y la tasa de utilización del capital se convierte en un instrumento empleado por los agentes económicos para la composición de sus planes óptimos. En resumen, nuestro interrogante es si al incorporar los gastos de reparación y mantenimiento en el modelo agregado de actividad económica, cambiará sustancialmente lo que sabemos acerca de la hipótesis de convergencia en el corto plazo, sobre los determinantes de la tasa de crecimiento a largo plazo y sobre otras variables endógenas. Los supuestos acerca de la tecnología permiten ampliar el modelo básico de manera que se pueden definir adecuadamente las funciones de inversión, depreciación y utilización del capital. El que hasta el momento no conozcamos contribuciones teóricas que consideren estos tres aspectos conjuntamente nos ha llevado a realizar este trabajo.

[1] El papel activo de la inversión ha sido estudiado en el artículo de ABEL y BLANCHARD (1983) para un modelo neoclásico *à la Ramsey,* y también por BARRO y SALA-I-MARTÍN (1992) en un modelo de crecimiento endógeno con tecnología AK.

El artículo se organiza de la siguiente forma: en el apartado 2 se describe la economía y se presentan los supuestos que caracterizan las distintas partes del modelo de equilibrio general. En la sección 3 se resuelve el problema de optimización intertemporal, mientras que el sistema dinámico obtenido del mismo se estudia en el apartado 4. En la sección 5 se obtienen los resultados económicos al tiempo que se contectan con la literatura empírica que muestra resultados paralelos a los obtenidos en este trabajo. Por último en la sección 6 se recogen las conclusiones de este trabajo.

2. La economía

Consideraremos una economía compuesta por un número muy grande de individuos idénticos con vida infinita. Supondremos que la población, N_t, crece a una tasa constante y exógena $n \geq 0$, si además normalizamos la población inicial a 1, tenemos que $N_t = e^{nt}$. Además, supondremos que los individuos se enfrentan a un escenario de decisión temporal infinito y descuentan el futuro a una tasa constante positiva $\rho > n$. Las preferencias de los individuos quedan representadas por una función de utilidad instantánea

$$U(c_t) = \frac{c_t^{1-\Phi} - 1}{1 - \Phi} \tag{1}$$

donde c_t es el consumo per capita y $\Phi^{-1} > 0$ la elasticidad de sustitución intertemporal.

Por otra parte, existen en esta economía muchas empresas que producen un único bien. Supondremos que cada empresa utiliza una tecnología del tipo AK, siendo el stock de capital $K_t > 0$ el único factor de producción relevante[2]. Interpretamos el capital en un sentido amplio, de manera que incluye tanto el capital físico como humano, éste último incorporado en los trabajadores. En este sentido, el capital humano se considera un factor rival y excluible de la misma forma en que lo es el capital físico. El trabajo, medido como el número de trabajadores e independientemente del índice de capital humano, se considera sustituto perfecto del capital físico y no es necesario en el proceso productivo. De esta manera la producción total de un período Y_t es una función del capital realmente utilizado $K_t u_t$, siendo $u_t \in [0, 1]$ la proporción variable del capital instalado que las empresas deciden utilizar, y del parámetro de eficiencia A que representa un nivel tecnológico constante. Este último parámetro puede interpretarse como la productividad marginal así como la productividad media del capital realmente utilizado. Por lo tanto, y dada la existencia

[2] Podrían obtenerse resultados similares con una función de producción más general que presente rendimientos constantes a escala si incorporamos, siguiendo a ROMER (1986), los supuestos de *learning-by-investing* junto con efectos de difusión de conocimiento.

de rendimientos constantes inherente a una función de producción lineal, podemos reescribir la función de producción en términos per capita

$$y_t = Ak_t u_t \tag{2}$$

El único bien obtenido en el proceso productivo puede destinarse al consumo, a la acumulación de nuevos bienes de capital o a la conservación del capital instalado. Mientras que el consumo presente contribuye directamente a aumentar el bienestar, los otros usos de la producción están relacionados con un aumento en el stock de capital permitiendo un mayor consumo futuro. En este contexto, la acumulación de nuevos bienes de capital considera no sólo el desembolso que implica la inversión sino también las actividades de reparación y mantenimiento. Consecuentemente tenemos que introducir en nuestro marco de referencia las correspondientes funciones de costes.

Supondremos, en primer lugar, que los costes de ajuste, internos a las empresas, quedan representados por una función linealmente homogénea $\Psi(I_t, K_t)$, creciente con la inversión bruta, $I_t > 0$, y decreciente con el stock de capital instalado. Así, $\Psi(I_t, K_t) = \Psi(I_t/K_t, 1)K_t = \phi(i_t)K_t$, donde

$$\phi(i_t) = \frac{bi_t^2}{2} \tag{3}$$

siendo i_t la tasa de inversión bruta sobre el capital y b una constante positiva.

En segundo lugar, y con la intención de conservar el stock de capital instalado, supondremos que período a período es posible reducir la depreciación por deterioro que aparece en los equipos por la edad y el uso[3], gracias a actividades de reparación y mantenimiento. Estas actividades implican unos costes de mantenimiento que supondremos internos a la empresa y que representaremos por una función linealmente homogénea $M(D_t, K_t u_t)$, decreciente con la depreciación total, $D_t > 0$, y creciente con el capital realmente utilizado. Redefiniendo las variables tenemos $M(D_t, K_t u_t) = M(D_t/K_t, K_t u_t/K_t)K_t = m(\delta_t, u_t)K_t$, donde

$$m(\delta_t, u_t) = d\delta_t^{-\varepsilon} u_t^{1+\varepsilon} \tag{4}$$

siendo $\delta_t > 0$ la tasa de depreciación endógena sobre el stock de capital. En esta función $\varepsilon > 0$ representa, aproximadamente, la elasticidad del coste de mantenimiento

[3] Aquí nos estamos refiriendo estrictamente al deterioro del capital pero, a diferencia de lo que ocurre en otros trabajos, consideramos esta depreciación como un fenómeno económico porque hemos supuesto que las empresas pueden elegir optimamente la cantidad de recursos que dedican al mantenimiento. En este trabajo ignoramos la obsolescencia como causa de la depreciación. Los factores que habitualmente provocan la obsolescencia no son tenidos en cuenta porque suponemos que el capital es perfectamente maleable.

medio con respecto a la tasa de depreciación y la tasa de utilización del capital y d es una constante positiva.

La restricción agregada de recursos es $Y_t = C_t + I_t + \Psi(I_t, K_t) + M(D_t, K_t u_t)$ con $I_t = \dot{K}_t + \delta_t K_t$. En términos per capita, la restricción de recursos queda determinada por las dos ecuaciones siguientes:

$$c_t + \left(i_t + \frac{bi_t^2}{2} + d\delta_t^{-\varepsilon} u_t^{1+\varepsilon}\right)k_t = Ak_t u_t \tag{5}$$

$$\dot{k}_t = (i_t - \delta_t - n)k_t \tag{6}$$

donde $\dot{k}$ es la derivada con respecto al tiempo del capital per capita considerado en sentido amplio.

3. El problema de optimización

En esta economía, dada la ausencia de externalidades y otros fallos como imperfecciones o mercados incompletos, la solución al problema de asignación intertemporal de recursos derivada de un equilibrio competitivo es equivalente a la solución que obtendría un planificador central. El problema de optimización del planificador central consiste en elegir en cada momento del tiempo las tres variables de control: la tasa de utilización del capital, la tasa de inversión y la tasa de depreciación que resuelve el siguiente problema

$$\max_{\{u_t, i_t, d_t\}} W = \int_0^\infty \frac{c_t^{1-\Phi} - 1}{1 - \Phi} e^{-(\rho-n)t} dt \quad \text{s.a.} \quad (5), (6) \text{ y } k_0 \tag{P}$$

El valor del hamiltoniano en valor corriente asociado a este problema, una vez eliminados los subíndices, puede escribirse del siguiente modo:

$$H^c = \frac{\left[Aku - \left(i + \frac{bi^2}{2} + d\delta^{-\varepsilon} u^{1+\varepsilon}\right)k\right]^{1-\Phi} - 1}{1 - \Phi} + \mu(i - \delta - n)k$$

siendo μ la variable de coestado. De acuerdo con el principio del máximo, una solución interior óptima al problema (P) debe satisfacer las siguientes condiciones de primer orden:

$$A = (1 + \varepsilon)d\delta^{-\varepsilon} u^{\varepsilon} \tag{7}$$

$$\mu = c^{-\Phi(1 + bi})} \tag{8}$$

$$\mu = c^{-\Phi} \varepsilon d\delta^{-1-\varepsilon} u^{1+\varepsilon} \tag{9}$$

la ecuación de Euler

$$\dot{\mu} = -c^{-\Phi}\left(Au - i + \frac{bi^2}{2} + d\delta^{-\varepsilon}u^{1+\varepsilon}\right) + \mu(\rho + \delta - i) \tag{10}$$

las restricciones (5) y (6), así como la condición inicial $k_0 > 0$ y la condición de transversalidad

$$\lim_{t\to\infty} e^{-(\rho-n)t}\mu_t k_t = 0 \tag{11}$$

El multiplicador μ define el precio sombra, medido en unidades de utilidad, de una unidad adicional de capital instalado. El término $(1 + \varepsilon)d\delta^{-\varepsilon}u^{\varepsilon} \equiv m_u(\delta, u)$ es el coste marginal de mantenimiento asociado a un aumento en la tasa de utilización. La ecuación (7) muestra que este coste marginal debe ser igual a la productividad marginal del incremento en la tasa de utilización, A. El término $(1 + bi)$ es el coste marginal de oportunidad de la inversión bruta. Siendo esto así, la ecuación (8) muestra que este coste marginal medido en unidades de utilidad debe ser igual al precio sombra del capital. El término $\varepsilon d\delta^{-1-\varepsilon}u^{1+\varepsilon} \equiv -m_\delta(\delta, u)$ es el ahorro marginal en costes de mantenimiento asociado con un aumento de la tasa de depreciación. Un aumento de δ reduce el stock de capital y, por consiguiente, disminuye los gastos en mantenimiento. Por lo tanto, la ecuación (9) establece que este ahorro marginal medido en unidades de utilidad debe ser igual al precio sombra de la pérdida de capital. Además, dado que el planificador central tiene dos formas alternativas de incrementar el capital: inversión y mantenimiento, en el equilibrio el coste marginal de la inversión debe ser igual al coste marginal de reducir la depreciación gracias al mantenimiento, $1 + bi = \varepsilon d\delta^{-1-\varepsilon}u^{1+\varepsilon}$.

Resolviendo las condiciones de primer orden obtenemos las siguientes funciones de control

$$i(\Theta) = \frac{1}{b}\left[\frac{\varepsilon}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}}\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} - 1\right] \tag{12}$$

$$\delta(k, \mu, \Theta) = \frac{\frac{1}{2b}\left[\frac{\varepsilon}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}}\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\right]^2 - \frac{1}{2b}}{\frac{\varepsilon}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}}\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}} + \frac{\mu^{\frac{-1}{\Theta}}k^{-1}}{\left[\frac{\varepsilon}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}}\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\right]^{1-\frac{1}{\Phi}}} \tag{13}$$

$$u(k, \mu, \Theta) = \frac{\frac{1}{2b}\left[\frac{\varepsilon}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}}\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\right]^2 - \frac{1}{2b}}{\varepsilon\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)} + \frac{\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\mu^{\frac{-1}{\Phi}}k^{-1}}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}\left[\frac{\varepsilon}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}}\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\right]^{1-\frac{1}{\Phi}}} \tag{14}$$

donde Φ representa un vector de parámetros estructurales. Como puede observarse, la inversión depende solamente de parámetros, y por lo tanto, presenta un valor constante tal y como refleja la ecuación (12). Las ecuaciones (13) y (14) muestran que δ y u dependen negativamente de las variables de estado y coestado. Además estas dos variables se encuentran lineal y positivamente relacionadas una con la otra. Sustituyendo las funciones de control en la restricción de recursos (5) y en la función de producción (2), respectivamente obtenemos las siguientes expresiones: $c(k, \mu, \Theta)$ y $y(k, \mu, \Theta)$, con $c_k = 0$, $c_\mu < 0$, $y_k > 0$ y $y_\mu < 0$. Estos resultados muestran además algunas características del modelo. En primer lugar, dado que el stock de capital y su precio sombra se mueven en direcciones opuestas, es difícil a primera vista concluir acerca de la evolución de variables como la tasa de utilización del capital y la tasa de depreciación. En segundo lugar, el que la tasa de inversión sea constante implica que la participación de la inversión bruta y el ratio capital-producto se moverán paralelamente. Tercero, el consumo y la producción per capita evolucionan de forma opuesta a como lo hace el precio sombra del stock de capital. Además la producción per capita progresa en la misma dirección que el stock de capital.

Finalmente, consideraremos la ecuación (10) y después de algunas sustituciones la resolvemos *forward* sujeta a la condición de transversalidad (11) para evitar soluciones explosivas. De este modo obtenemos μ como el valor presente descontado del producto marginal total del capital medido en unidades de utilidad,

$$\mu_t = \int_t^{\infty} c_s^{-\Phi}\left(Au_s + \frac{bi_s^2}{2} - d\delta_s^{-\varepsilon}u_s^{1+\varepsilon}\right)e^{-\int_t^s(\rho+\delta_z)}ds \tag{15}$$

En esta expresión, el término de descuento tiene en cuenta el hecho de que la tasa de depreciación es variable.

4. El sistema dinámico y la solución analítica

Cuando sustituimos las funciones de control en (6) y (10), el sistema dinámico que describe la evolución de las variables de estado y coestado queda

$$\dot{k} = \left[\frac{\left[\frac{\varepsilon}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}}\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} - 1\right]^2}{\frac{2b\varepsilon}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}}\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}} - n\right]k - \left[\frac{\varepsilon}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}}\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\right]^{\frac{1}{\Phi}-1}\mu^{\frac{-1}{\Phi}} \tag{16}$$

$$\dot{\mu} = \left[-\frac{\left[\frac{\varepsilon}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}}\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} - 1\right]^2}{\frac{2b\varepsilon}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}}\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}} + \rho\right]\mu \tag{17}$$

Este sistema dinámico es no lineal y no adminte linealización debido a que no existe un estado estacionario bien definido. Sin embargo, su estructura permite la solución analítica del mismo[4]. Las únicas trayectorias solución particulares no explosivas de este sistema son

$$k(t,\Theta) = k_0 \exp\left\{ \frac{1}{\Phi}\left[\frac{\left[\frac{\varepsilon}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}}\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} - 1 \right]^2}{\frac{2b\varepsilon}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}}\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}} - \rho \right] t \right\} \tag{18}$$

$$\mu(t,\Theta) = \mu(0)\exp\left\{ \left[\rho - \frac{\left[\frac{\varepsilon}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}}\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} - 1 \right]^2}{\frac{2b\varepsilon}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}}\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}} \right] t \right\} \tag{19}$$

siendo k_0 conocido y

$$\mu(0) = \frac{\left[\frac{\varepsilon}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}}\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \right]^{1-\Phi}}{\left[\frac{\left(1-\frac{1}{\Phi}\right)\left[\frac{\varepsilon}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}}\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} - 1 \right]^2}{\frac{2b\varepsilon}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}}\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}} + \frac{\rho}{\Phi} - n \right]^{\Phi}} \frac{1}{k_0^{\Phi}} \tag{20}$$

Calculamos el término $\mu^{\frac{-1}{\Phi}} k^{-1}$ utilizando (18) y (19), puesto que es necesario para determinar las trayectorias particulares de las variables de control. Obtenemos $\mu^{\frac{-1}{\Phi}} k^{-1} = \mu(0)^{\frac{-1}{\Phi}} k_0^{-1}$, y sustituyendo este resultado en (12)-(14) conseguimos las trayectorias explícitas en su forma analítica para i, δ y u,

$$i(\Theta) = \frac{1}{b}\left[\frac{\varepsilon}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}}\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} - 1 \right] \tag{21}$$

$$\delta(\Theta) = \frac{\left[\frac{\varepsilon}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}}\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \right]^2 - 1 + \left(1-\frac{1}{\Phi}\right)\left[\frac{\varepsilon}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}}\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} - 1 \right]^2}{\frac{2b\varepsilon}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}}\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}} + \frac{\rho}{\Phi} - n \tag{22}$$

[4] En el Apéndice se encuentran los detalles relativos a esta solución.

$$u(\Theta) = \frac{\left[\frac{\varepsilon}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}}\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\right]^2 - 1 + \left(1 - \frac{1}{\Phi}\right)\left[\frac{\varepsilon}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}}\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} - 1\right]^2}{2b\varepsilon\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)} + \frac{\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\left(\frac{\rho}{\Phi} - n\right)}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}} \tag{23}$$

La tasa de inversión, la tasa de depreciación y la tasa de utilización del capital son constantes a lo largo de la trayectoria solución particular. Este resultado acerca de la inversión ya lo teníamos en (12) dada la independencia de i con respecto a las variables de estado y coestado. Sin embargo, en el caso de la tasa de depreciación y de utilización del capital, el mencionado resultado se debe a la compensación de los efectos ejercidos por el stock de capital y su precio sombra sobre cada una de esas variables a lo largo de la trayectoria solución óptima. Dado que la tasa de inversión bruta sobre el capital es siempre no negativa, las restricciones sobre los parámetros obtenidas en el Apéndice a partir de la condición de transversalidad conducen a la no negatividad de las tasas de depreciación y utilización del capital. La restricción adicional de que la tasa de utilización debe ser menor o igual que la unidad equivale a imponer una cota superior a la tasa de depreciación, de manera que se cumpla la restricción

$$\delta \in \left[0,\ d^{\frac{1}{\varepsilon}}\left(\frac{1+\varepsilon}{A}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\right]$$

Además, de (2), (5) y de las trayectorias para las variables de control obtenidas previamente, derivamos las trayectorias solución particulares para la producción y el consumo per capita:

$$y(t, \Theta) = Au(\Theta)k_0 \exp\left\{\frac{1}{\Phi}\left[\frac{\left[\frac{\varepsilon}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}}\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} - 1\right]^2}{\frac{2b\varepsilon}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}}\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}} - \rho\right] t\right\} \tag{24}$$

$$c(t, \Theta) = \Gamma(\Theta)k_0 \exp\left\{\frac{1}{\Phi}\left[\frac{\left[\frac{\varepsilon}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}}\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} - 1\right]^2}{\frac{2b\varepsilon}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}}\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}} - \rho\right] t\right\} \tag{25}$$

El término $\Gamma(\Phi) = Au(\Theta) - i(\Theta) - \phi(i(\Theta)) - m\delta(\Theta), u(\Theta)) > 0$ es independiente del tiempo y representa el ratio $\frac{c(t, \Theta)}{k(t, \Theta)}$, que es constante a lo largo de la trayectoria solución óptima,

$$\Gamma(\Theta) = \left[\frac{\varepsilon}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}}\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\right]^2 \left[\frac{\left(1-\frac{1}{\Phi}\right)\left[\frac{\varepsilon}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}}\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}-1\right]^2}{\frac{2b\varepsilon}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}}\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}} + \frac{\rho}{\Phi} - n\right] \tag{26}$$

5. Crecimiento equilibrado y estática comparativa

Los resultados obtenidos previamente caracterizan la senda de crecimiento equilibrado. Así, el modelo no presenta dinámica transicional y, dada la solución analítica completa que hemos obtenido para cada una de las variables, es fácil llegar a conclusiones acerca de la tasa de crecimiento. En particular obtenemos

$$\gamma_i = \gamma_\delta = \gamma_u = 0 \tag{27}$$

$$\gamma_k = \gamma_y = \gamma_c = \gamma = \frac{1}{\Phi}\left[\frac{\left[\frac{\varepsilon}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}}\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}-1\right]^2}{\frac{2b\varepsilon}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}}\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}} - \rho\right] \tag{28}$$

La última expresión es positiva para

$$\frac{\varepsilon^2}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}}\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{2(1+\varepsilon)}{\varepsilon}} > (1+b\rho)\frac{2\varepsilon}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}}\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} - 1$$

La tasa de crecimiento γ no depende del stock de capital inicial k_0 y no está relacionado ni con el nivel inicial de renta ni con cualquier otro nivel de renta per capita.

La tasa de ahorro, definida como $s(t, \Theta) = 1 - \frac{c(t, \Theta)}{y(t, \Theta)}$, presenta un valor constante:

$$s(\Theta) = \frac{Au(\Theta) - \Gamma(\Theta)}{Au(\Theta)} = \frac{i(\Theta) + \phi(i)(\Theta)) + m(\delta(\Theta), u(\Theta))}{Au(\Theta)} \tag{29}$$

Las familias financian dos tipos de desembolsos relacionados con el proceso de acumulación de capital: gasto en inversión bruta, incluyendo costes de ajuste, y gasto en mantenimiento del capital.

Además, dada la ausencia de dinámica transicional, a lo largo de la senda de crecimiento óptimo (equilibrado) el bienestar depende del nivel inicial de consumo y de la tasa constante de crecimiento. Si sustituimos los valores conocidos obtenemos

$$W(\Theta) = \int_0^{\infty} \frac{c(t, \Theta)^{1-\Phi} - 1}{1 - \Phi} e^{-(\rho-n)t} dt$$

$$= \frac{1}{1-\Phi}\left(\frac{\left[\frac{\varepsilon}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}}\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\right]^{1-\Phi} k_0^{1-\Phi}}{\left[\frac{\left(1-\frac{1}{\Phi}\right)\left[\frac{\varepsilon}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}}\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} - 1\right]^2}{\frac{2b\varepsilon}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}}\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}} + \frac{\rho}{\Phi} - n\right]^{\Phi}} - \frac{1}{\rho - n} \right) \tag{30}$$

Aunque no resulte fácil calcular los impactos individuales, la expresión anterior muestra el bienestar óptimo como una función que sólo depende de los parámetros estructurales del modelo.

Ahora, podemos mostrar algunos resultados que se derivan del ejercicio de estática comparativa para las variables i, δ, u y γ. La mayoría de ellos no se pueden encontrar en la literatura teórica debido a que el modelo canónico de crecimiento endógeno considera que la tasa de depreciación es constante y que el stock de capital se utiliza plenamente. De (21), (22), (23) y (28) se deduce que:

1. Cuanto mayor es la productividad del capital efectivamente utilizado, A, mayor es la tasa de inversión, la tasa de depreciación y la tasa de utilización del capital.
2. Cuanto mayor es el peso de los costes de instalación y mantenimiento en términos de producto bruto, representado por b y d respectivamente, menor es la tasa de inversión, la tasa de depreciación y la tasa de utilización del capital.
3. La tasa de utilización del capital y la tasa de depreciación estan directamente relacionadas con el grado de impaciencia que presentan los agentes, representada por una baja elasticidad de sustitución intertemporal del consumo, Φ^{-1}, o por una elevada tasa de descuento, ρ.
4. Cuanto mayor es la tasa de crecimiento de la población menores son la tasa de depreciación y de utilización del capital.
5. La tasa de inversión no depende de los parámetros relativos a las preferencias ni de la tasa de crecimiento de la población.
6. Cuanto mayor es el peso de los costes de instalación y mantenimiento en términos de producto bruto, b y d respectivamente, menor es la tasa de crecimiento.

Los resultados anteriores acerca de la depreciación y el crecimiento son, en su mayor parte, consistentes con la evidencia empírica disponible. Sin embargo, los resultados relativos a la utilización del capital no han sido todavía contrastados empíricamente.

6. Conclusiones

Al igual que en los modelos AK, el modelo desarrollado en este trabajo no presenta dinámica transicional. Las variables k, y y c conforman una única senda de crecimiento equilibrado mientras que las variables i, δ y u, a pesar de ser endógenamente determinadas, son óptimamente constantes. Además obtenemos una tasa de ahorro y un ratio consumo/capital constantes. Estos resultados se derivan del supuesto de funciones de coste de ajuste y de mantenimiento lineales con respecto a k, pero las conclusiones podrían ser diferentes si no se verificase este supuesto.

Entre los resultados obtenidos en este trabajo destacamos algunas dependencias entre parámetros. Así cuanto menores son los costes de instalación y mantenimiento y mayor el nivel de eficiencia de la economía, mayores son las tasas de inversión, de utilización y de depreciación así como la tasa de crecimiento de la economía. Además, cuanto mayor es la tasa de crecimiento de la población menores son las tasas de depreciación y de utilización del capital, pero no se ven afectadas ni la tasa de inversión ni la tasa de crecimiento de la economía. Por último, cuanto mayor es el grado de paciencia de los agentes mayor es la tasa de crecimiento y menores las tasas de depreciación y utilización del capital.

Por otra parte, dada la influencia de la tasa de utilización, un volumen de capital utilizado más intensivamente puede producir más que un mayor stock de capital con un menor uso. Por lo tanto, puede ser factible que una economía con un menor stock de capital produzca y consuma más que otra economía con un stock de capital mayor. Sin embargo, la ausencia de convergencia implica que cualquier diferencia inicial en los niveles de renta per capita siempre se ampliarán, nunca se reducirán. De esta manera nuestro modelo puede dar luz sobre la gran disparidad entre países ricos y pobres así como la persistencia de la misma a lo largo del tiempo, pero no puede explicar la facultad mostrada por algunos países para cambiar sus posiciones respecto a la distribución de su renta per capita. Es decir, las experiencias de crecimiento conocidas como milagros y desastres y que se encuentan asociadas a procesos de *overtaking*.

7. Apéndice

El sistema dinámico (16)-(17) puede resolverse directamente de forma secuencial junto con las condiciones frontera. Sin embargo, para ser exhaustivos en nuestra búsqueda de la solución analítica, así como en el estudio de la existencia, unicidad y positividad de la misma, tomaremos como referencia el sistema dinámico Hamiltoniano modificado estudiado en Ruiz-Tamarit y Ventura-Marco (2000) cuya estructura es

$$\dot{k}(t) = \Delta_k k(t) - \Omega_k k(t)^{a_{11}} \mu(t)^{a_{22}} \tag{A.1}$$

$$\dot{\mu}(t) = \Delta_\mu \mu(t) + \Omega_\mu k(t)^{a_{11}-1} \mu(t)^{1+a_{22}} \tag{A.2}$$

$$k(t_0) = k_0 \tag{A.3}$$

$$\lim_{t \to \infty} \mu(t) k(t) \exp\{-(\rho - n)(t - t_0)\} = 0 \tag{A.4}$$

Los elementos $\Delta_k > 0$, $\Delta_\mu \geq -\Delta_k$, $\Omega_k > 0$, $\Omega_\mu \geq 0$, $a_{11} \gtreqless 0$, $a_{22} < 0$, k_0, t_0 y ρ son parámetros constantes, mientras que k, μ y t son las variables. Los mencionados autores suponen que $\Omega_k > \Omega_\mu$, $1 - a_{11} > 0$ y $1 + a_{22} \gtreqless 0$.

Es fácil comprobar que el sistema dinámico anterior se simplifica en la forma (16)-(17) bajo los siguientes supuestos sobre los valores concretos de los parámetros:

$$\Delta_k = H(\Theta) - n$$

$$\Delta_\mu = \rho - H(\Theta)$$

$$H(\Theta) = \left[\frac{\varepsilon}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}} \left(\frac{A}{1+\varepsilon} \right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} - 1 \right]^2 \Bigg/ \frac{2b\varepsilon}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}} \left(\frac{A}{1+\varepsilon} \right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}$$

$$\Omega_k = \left[\frac{\varepsilon}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}} \left(\frac{A}{1+\varepsilon} \right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \right]^{\frac{1}{\Theta}-1} > 0$$

$$\Omega_\mu = 0$$

$$a_{11} = 0$$

$$a_{22} = \frac{-1}{\Theta} < 0$$

De estos valores se deduce que $\Delta_k + \Delta_\mu = \rho - n > 0$, donde el miembro derecho de la igualdad recoge la tasa de descuento intertemporal efectiva. Además, $\Delta_k > \rho - n$ dado que $H(\Theta) - \rho > 0$, lo que implica que $\Delta_\mu < 0$ y $\Delta_k > 0$.

En este contexto procederemos en tres etapas. En la primera definimos la variable instrumental $X(t) = k(t)\mu(t)^{\frac{1}{\Phi}}$. Diferenciando totalmente y sustituyendo las ecuaciones (A.1) y (A.2) tenemos

$$\dot{X}(t) = a_x X(t) - b_x \tag{A.5}$$

Se trata de una ecuación diferencial lineal autónoma no homogénea con coeficientes constantes

$$a_x = \Delta_k + \frac{\Delta_\mu}{\Phi} = \left(1 - \frac{1}{\Phi}\right)H(\Theta) + \frac{\rho}{\Phi} - n \gtrless 0 \;\text{ y }\; b_x = \Omega_k > 0$$

Dada la condición inicial k_0 y un cierto valor inicial $\mu(t_0)$, por el momento desconocido, podemos determinar la condición inicial $X(t_0) = k_0\mu(t_0)^{\frac{1}{\Phi}}$, de manera que cualquier solución particular (A.5) debe tomar la forma

$$X(t) = \frac{b_x}{a_x} + \left[X(t_0) - \frac{b_x}{a_x}\right] \exp\{a_x(t - t_0)\} \tag{A.6}$$

Conocidos los parámetros y el valor inicial de las variables, la anterior expresión determina el valor de $X(t)$ en cualquier período del tiempo. En la segunda etapa, transformamos el sistema no lineal inicial y obtenemos dos ecuaciones diferenciales lineales separadas, no autónomas pero homogéneas, para las variables primarias

$$\dot{k}(t) = \left(\Delta_k - \frac{\Omega_k}{X(t)}\right)k(t) \tag{A.7}$$

$$\dot{\mu}(t) = \Delta_\mu \mu(t) \tag{A.8}$$

Las expresiones para las soluciones particulares son, respectivamente,

$$k(t) = k_0 \exp\left\{\int_{t_0}^{t}\left(H(\Theta) - n - \frac{\left[\frac{\varepsilon}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}}\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\right]^{\frac{1}{\Phi}-1}}{X(s)}\right)ds\right\} \tag{A.9}$$

$$\mu(t) = \mu(t_0)\exp\{-(H(\Theta) - \rho)(t - t_0)\} \tag{A.10}$$

En la tercera etapa se determina el valor inicial de la variable de coestado $\mu(t)$ para el cual las trayectorias solución no son explosivas. Dado que k_0 es conocido, esto se consigue determinando $X(t_0)$. Toda la información que se requiere en este punto se puede deducir de la condición de transversalidad. Esta condición necesaria, dados los signos de los parámetros, puede simplificarse del siguiente modo:

$$\lim_{t\to\infty}\left|\frac{b_k \exp\{-a_x(t - t_0)\}}{a_x X(t_0)} + 1 - \frac{b_k}{a_x X(t_0)}\right| = 0 \tag{A.11}$$

En particular, dado que $b_x > 0$, esta condición se satisface si y sólo si

$$a_x = \left(1 - \frac{1}{\Phi}\right) H(\Theta) + \frac{\rho}{\Phi} - n > 0$$

junto con

$$X_0(t_0) = \frac{b_x}{a_x} = \frac{\left[\frac{\varepsilon}{d^{\frac{1}{\varepsilon}}}\left(\frac{A}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\right]^{\frac{1}{\Phi}-1}}{\left(1 - \frac{1}{\Phi}\right) H(\Theta) + \frac{\rho}{\Phi} - n}$$

Volviendo a (A.6) tenemos que $X(t)$ se mantendrá constante en su valor estacionario inicial $X(t_0) > 0$, $\forall\ t \geq t_0$. Por consiguiente, las trayectorias solución no explosivas para las variables implicadas en el sistema dinámico hamiltoniano modificado (A.1)-(A.4) son únicas, positivas y pueden escribirse como aparecen en las ecuaciones (18), (19) y (20). Finalmente, la restricción

$$\frac{\Omega_\mu}{-\Delta_\mu} = 0 < \frac{\Omega_k}{\Delta_k} = \frac{\Omega_k}{H(\Theta) - n} < \frac{b_k}{a_x} = \frac{\Omega_k}{\left(1 - \frac{1}{\Phi}\right) H(\Theta) + \frac{\rho}{\Phi} - n}$$

se verifica también, por lo que podemos concluir que $H(\Theta) > \rho$.

Referencias bibliográficas

[1] ABEL, A. B. y BLANCHARD, O. J. (1983): «An Intertemporal Model of Saving and Investment», *Econometrica,* 51, 675-692.

[2] BARRO, R. J. y SALA-I-MARTIN, X. (1992): «Public Finance in Models of Economic Growth», *Review of Economic Studies,* 59, 645-661.

[3] BISCHOFF, C. W. y KOKKELENBERG, E. C. (1987): «Capacity Utilization and Depreciation in Use», *Applied Economics,* 19, 995-1007.

[4] BOUCEKKINE, R. y RUIZ-TAMARIT, J. R. (2003): «Capital Maintenance and Investment: Complements or Substitutes?», *Journal of Economics,* 78 (1), 1-28.

[5] BURNSIDE, C. y EICHENBAUM, M. (1996): «Factor-Hoarding and the Propagation of Business-Cycle Shocks», *American Economic Review,* 86, 1154-1174.

[6] COLLARD, F. y KOLLINTZAS, T. (2000): «Maintenance, Utilization, and Depreciation along the Business Cycle», CEPR, DP 2477, UK.

[7] EPSTEIN, L. y DENNY, M. (1980): «Endogenous Capital Utilization in a Short-Run Production Model», *Journal of Econometrics* 12, 189-207.

[8] GYLFASON, T. y ZOEGA, G. (2001): «Obsolescence», CEPR, DP 2833, UK.

[9] JOHNSON, P. A. (1994): «Capital Utilization and Investment when Capital Depreciates in Use: Some Implications and Tests», *Journal of Macroeconomics,* 16 (2), 243-259.

[10] LICANDRO, O. y PUCH, L. A. (2000): «Capital Utilization, Maintenance Costs and the Business Cycle», *Annales d'Economie et de Statistique,* 58, 143-164.

[11] LICANDRO, O.; PUCH, L. A. y RUIZ-TAMARIT, J. R. (2001): «Optimal Growth under Endogenous Depreciation, Capital Utilization and Maintenance Costs», *Investigaciones Económicas,* 25, 543-559.

[12] McGRATTAN, E. y SCHMITZ, J. A. Jr. (1999): «Maintenance and Repair: Too Big to Ignore», *Quarterly Review,* 23, 4, Federal Reserve Bank of Minneapolis.

[13] MOTAHAR, E. (1992): «Endogenous Capital Utilization and the q Theory of Investment», *Economic Letters,* 40, 71-75.

[14] REBELO, S. (1991).«Long-Run Policy Analysis and Long-Run Growth», *Journal of Political Economy,* 99, 500-521.

[15] ROMER, P. (1986): «Increasing Returns and Long-Run Growth», *Journal of Political Economy,* 94, 1002-1037.

[16] RUIZ-TAMARIT, J. R. y VENTURA-MARCO, M. (2000): «Solution to Non-linear MHDS arising from Optimal Growth Problems», FEDEA, DT 2000-16, Spain.

[17] RUMBOS, B. y AUERNHEIMER, L. (2001): «Endogenous Capital Utilization in a Neoclassical Growth Model», *Atlantic Economic Journal,* 29 (2), 121-134.