

Progreso técnico incorporado, adopción y mantenimiento

Raouf Boucekkine
Université catholique de Louvain

Blanca Martínez
Universidad Complutense de Madrid

Cagri Saglam
Bilkent University

Resumen

En este artículo se analizan las propiedades de un modelo de crecimiento óptimo en el que el factor trabajo puede ser asignado a la producción de un bien final, a la adopción de nuevas tecnologías o al mantenimiento del capital. El proceso de adopción sigue una ley de evolución similar a la propuesta por Nelson y Phelps (1966). Entre otros resultados obtenemos que ante un avance en la frontera tecnológica se debería retrasar el proceso de adopción, dando lugar a una fase no intensiva de adopción. Además, durante dicha fase el mantenimiento actúa como un sustituto transitorio a la adopción.

Palabras clave: adopción tecnológica, mantenimiento, generaciones de capital, dinámica.

Clasificación JEL: E22, E32, O40.

Abstract

We study the properties of an optimal growth model of a developing economy with one-hoss shay vintage capital, where the scarce (skilled) labor resources can be allocated freely either to production, technology adoption or capital maintenance. Technological progress is partly embodied. Technology adoption features a kind of catching up law of motion according to a Nelson-Phelps scheme. We first analytically characterize the balanced growth paths of the economy. Second, we numerically investigate the short run dynamics of the model. Among numerous findings, we find that under exogenous technological accelerations, intensive technology adoption should be delayed, and maintenance acts as an optimal transitory substitute to adoption.

Keywords: technological adoption, maintenance, capital generations, dynamics.

JEL classification: E22, E32, O40.

1. Introducción

La importancia del mantenimiento del capital en la toma de decisiones de las empresas ha sido analizada ampliamente en los campos de la ingeniería y de la gestión de empresas (véase Pham y Wang, 1996). Sin embargo, en la literatura económica existen pocas contribuciones al respecto, entre las que destaca la investigación pionera de Nickel (1975). Durante los últimos años, y a raíz de los resultados empí-

ricos obtenidos por MacGrattan y Schmitz (1999)¹, han surgido algunos trabajos relativos a las propiedades cíclicas del mantenimiento (Licandro y Puch, 2000; Collard y Kollintzas, 2001) o al grado de complementariedad entre inversión y mantenimiento (Boucekkine y Ruiz-Tamarit, 2003; Kalaitzidakis y Kalyvitis, 2005). Las escasas contribuciones existentes confirman que el mantenimiento juega un papel significativo en la macroeconomía; por ejemplo, Kalaitzidakis y Kalyvitis (2005) muestran, entre otros resultados, que la economía Canadiense se beneficiaría de una reducción de los gastos en capital público y de una reasignación entre la nueva inversión pública y los gastos en mantenimiento.

En este artículo investigamos el papel del mantenimiento como potencial sustituto (transitorio) de la adopción tecnológica en los países en desarrollo. Se ha argumentado repetidamente (véase, por ejemplo, Greter, 1999, en el caso de México) que las transferencias tecnológicas en muchos casos no fomentan el crecimiento en los países en desarrollo, y que es necesario un esfuerzo para diseñar políticas óptimas de adopción tecnológica. En particular, dichas políticas deberían tener en cuenta las características específicas de las economías domésticas y la existencia de otras alternativas más baratas social y económicamente, al menos durante periodos transitorios. De la misma forma que la literatura reciente señala al mantenimiento como sustituto de la inversión, este trabajo argumenta que puede jugar un papel idéntico con respecto a las transferencias tecnológicas, sobre todo cuando el progreso técnico está incorporado en los bienes de inversión.

Licandro, Puch y Ruiz-Tamarit (2001) conectan mantenimiento y utilización del capital en un marco de crecimiento óptimo, pero no tienen en cuenta la adopción tecnológica. De hecho, pocos estudios adoptan este enfoque en la literatura. Entre ellos, Tiffen y Mortimore (1994) estudian el papel del mantenimiento del capital y la adopción tecnológica en la recuperación económica de Kenya; Boucekkine, Martínez y Saglam (2003), siguiendo la modelización de Nelson y Phelps (1966), muestran que destinar recursos al mantenimiento del capital aumenta la brecha tecnológica, pero eleva la producción de equilibrio a largo plazo.

Este trabajo se diferencia del de Boucekkine *et al.* (2003) en dos aspectos importantes. En primer lugar, incorporamos heterogeneidad en los bienes de capital: las nuevas generaciones son cada vez más eficientes, y además sólo el progreso técnico incorporado en el capital está involucrado en la ecuación de adopción tecnológica de Nelson y Phelps. En segundo lugar, extendemos el análisis del comportamiento de la adopción y del mantenimiento al corto plazo. No obstante, conservamos la idea de una economía en desarrollo sujeta a progreso técnico exógeno; la economía sólo adopta y no dedica recursos a I+D. Suponemos que los recursos de trabajo (cualificados) no crecen, reflejando así la escasez de capital humano en el sur. En este modelo, el planificador central tiene que elegir la asignación óptima de recursos

¹ Muestran que los costes de mantenimiento representaron el 6 por 100 del PIB canadiense, durante el período 1961-1993

laborales entre actividades (producción, mantenimiento y adopción) y entre bienes de capital de diferentes generaciones o *vintages* (para las actividades de producción y mantenimiento).

Las interacciones entre las actividades de mantenimiento y de adopción son mayores cuando el progreso técnico está incorporado en los bienes de capital. Por una parte, acelerar la adopción aumenta la eficiencia y la fiabilidad de los bienes de capital y por tanto su mantenimiento cobra más importancia. Sin embargo, si el esfuerzo en adopción es intenso, las ganancias esperadas de las nuevas inversiones aumentarán rápidamente y podría ser óptimo reducir el mantenimiento del capital existente e invertir masivamente en nuevos bienes de inversión. Por lo tanto, la correlación entre adopción y mantenimiento es ambigua y hace relevante el análisis con progreso técnico incorporado.

Adicionalmente, en este trabajo incorporamos depreciación *one-hoss shay* y una función de producción Cobb-Douglas a la Solow (1960). Los modelos *one-hoss shay* son los modelos de generaciones de capital más simples (véase Benhabib y Rustichini, 1991, y más recientemente, Boucekkine *et al.*, 2005) ya que en ellos se asume que los bienes de capital, aunque heterogéneos, tienen la misma vida finita y exógena. Restringimos nuestra investigación a este tipo de modelos porque la presencia simultánea de decisiones de adopción y mantenimiento complica tremendamente el álgebra. Incorporar la determinación endógena de la regla de reemplazo de bienes de capital haría el análisis del estado estacionario analíticamente intratable, y complicaría la computación numérica de la dinámica a corto plazo. Por lo tanto, hemos preferido incorporar el supuesto simplificador *one-hoss shay* completado con un extenso análisis de sensibilidad con respecto a la vida de los bienes de capital.

El trabajo se organiza del siguiente modo. La sección 2 contiene las principales especificaciones del modelo. En la sección 3 se resuelve el problema del planificador y se caracterizan las asignaciones óptimas del factor trabajo entre actividades y bienes de capital en el largo plazo. La sección 4 está destinada a la dinámica a corto plazo. Por último en la sección 5 se presentan las conclusiones.

2. El modelo

Consideramos una economía poblada con un elevado número de individuos idénticos de vida infinita que maximizan su utilidad descontada:

$$\sum_{t=1}^{\infty} \beta^t U(C_t)$$

donde β es el factor de descuento y C_t es el consumo individual en el periodo t . La economía produce un único bien final que puede ser destinado al consumo o a la inversión. El progreso técnico está incorporado en los nuevos bienes de inversión y

diferentes generaciones de bienes de capital pueden co-existir en cualquier momento del tiempo. Cada bien de capital tiene una vida útil de T periodos. Utilizamos una función de generaciones de capital idéntica a la función Cobb-Douglas considerada por Solow (1960). $Y_{s,t}$ representa la producción del *vintage* s en el periodo t , y viene dada por la siguiente ecuación:

$$Y_{s,t} = A_t(q_{s-1}K_{s,t})^\alpha L_{s,t}^{1-\alpha} \quad (1)$$

donde $L_{s,t}$ es la cantidad de trabajo empleada en la producción del bien final con el *vintage* S en el periodo t . $K_{s,t}$ mide la cantidad de capital de la generación S en uso en el periodo t , es decir, el capital instalado en t menos las pérdidas de capital debidas a la depreciación física después de $t - s \leq T$ periodos. En el momento de instalación $K_{s,s} = I_s$, siendo I_s la inversión en el periodo s . A_t representa el progreso técnico neutral, y por lo tanto aumenta la productividad marginal de todo el stock de capital. Por el contrario q_{s-1} es el progreso técnico incorporado en los bienes de capital de *vintage* s , y sólo afecta a este bien de equipo específico. Los avances tecnológicos se incorporan con un retardo de un periodo. Por último, conviene resaltar que $(q_{s-1}K_{s,t})$ es el capital de la generación s en t medido en unidades de eficiencia.

2.1. Depreciación física y mantenimiento

En este apartado se describe de forma detallada los efectos de la depreciación física sobre los bienes de capital. La tasa de depreciación física del bien de capital de la generación s en t , $\delta_{s,t}(\cdot)$ es endógena y depende del esfuerzo en mantenimiento²,

$$\begin{aligned} K_{s,t+1} &= K_{s,t}[1 - \delta_{s,t}(m_{s,t})] \\ \delta_{s,t}(0) &= \bar{\delta}_{s,t} \\ \delta_{s,t}(1) &= \underline{\delta}_{s,t} \\ \delta'_{s,t}(m) &< 0, \quad \delta''_{s,t}(m) > 0, \end{aligned}$$

siendo $m_{s,t}$ la cantidad de factor trabajo destinada al mantenimiento de los bienes de capital de la generación s , $1 \leq s \leq T$ en el periodo t . $\bar{\delta}_{s,t}$ y $\underline{\delta}_{s,t}$ son dos secuencias de números positivos que indican los límites superior e inferior de $\delta_{s,t}(\cdot)$. Por el momento, representamos la función de depreciación de la forma más general posible, permitiendo que durante un periodo de tiempo t la cantidad de recursos destinados al mantenimiento difiera por generaciones, y que las actividades de mantenimiento puedan verse afectadas por el progreso tecnológico. Con ello se incorpora la posibilidad de que el esfuerzo de mantenimiento sea menos efectivo en los bienes

² Normalizamos la oferta de trabajo a uno.

de capital más antiguos y que la eficacia del mantenimiento varíe a lo largo del tiempo. La ecuación anterior se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} K_{s, t+1} &= I_s E_{s, t+1} \\ E_{s, t+1} &= \prod_{j=s}^t [1 - \delta_{s, j}(m_{s, j})] \\ E_{s, s} &= 1 \end{aligned}$$

donde $E_{s, t}$ se puede interpretar como la fracción de capital instalado hace $t - s$ periodos y en uso al comienzo del periodo t . Las acciones simultáneas de depreciación física y económica implican la siguiente ley de evolución para los bienes de capital de la generación s :

$$\begin{aligned} K_{s, s} &= I_s \\ K_{s, t+1} &= I_s \prod_{j=s}^t [1 - \delta(m_{s, j})] \\ t &\in [s, s + T - 1] \\ K_{s, s+T+1} &= 0 \end{aligned}$$

2.2. Adopción y distancia tecnológica

Suponemos que la economía no innova y únicamente adopta los avances tecnológicos inventados en el exterior. Siguiendo a Nelson y Phelps (1966), existe un nivel tecnológico teórico q_t^0 , que crece exógenamente a tasa γ , $q_t^0 = \gamma^t$, y que representa el estado del conocimiento en t . Además, la adopción tecnológica es costosa y requiere un esfuerzo en términos de trabajo. El nivel tecnológico real depende del menú tecnológico y del esfuerzo en adopción. La ley de evolución del nivel tecnológico real viene dada por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} q_t &= q_{t-1} + d_t u_t^\theta [q_{t-1}^0 - q_{t-1}] \\ 0 &< \theta < 1 \end{aligned} \tag{3}$$

donde u_t es la cantidad de trabajo destinado a la adopción en t . Un aumento en el nivel tecnológico real puede reflejar un incremento de la cantidad de trabajo asignada a la adopción u_t , una mejora en el estado del conocimiento q_t^0 , o un aumento en la productividad de esta actividad, d_t . La ecuación (4) implica que la adopción muestra rendimientos decrecientes en el factor trabajo y recoge la hipótesis aceptada en la literatura de I+D sobre la existencia de rendimientos decrecientes en el esfuerzo de investigación (por ejemplo, véase Caballero y Jaffe, 1993).

2.3. Condiciones de equilibrio

Suponemos que el factor trabajo es homogéneo y puede ser utilizado en tres actividades diferentes: producción del bien final, adopción de nuevas tecnologías y mantenimiento del capital. La oferta de trabajo es exógena e igual a uno. La condición de vaciado de mercado implica:

$$1 = \sum_{s=t-T}^t L_{s,t} + \sum_{s=t-T}^t m_{s,t} + u_t \quad (5)$$

Finalmente, la condición de equilibrio en el mercado de bien final es la siguiente:

$$Y_t = \sum_{s=t-T}^t Y_{s,t} = C_t + I_t \quad (6)$$

3. El problema del planificador central

El problema del planificador central puede especificarse como:

$$\text{Max}_{\{L_{s,t}\}_{s=t-T}^t, \{m_{s,t}\}_{s=t-T}^t, u_t, I_t, q_t\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U \left(\sum_{s=t-T}^t Y_{s,t} - I_t \right)$$

sujeito a las restricciones (1) a (5), y dado K_{-1} y q_{-1} . La solución interior a este problema de optimización viene caracterizada por las siguientes condiciones de primer orden:

$$(1 - \alpha) A_t L_{s,t}^{1-\alpha} (q_{s-1} I_s E_{s,t})^{\alpha} U'(C_t) = \omega_t \quad (7)$$

$$s \in [t - T, t]$$

$$\beta \alpha D_{s,t} [1 - \delta_{s,t}(m_{s,t})]^{\alpha-1} [-\delta'_{s,t}(m_{s,t})] U'(C_{t+1}) = \omega_t \quad (8)$$

$$m_{t-T,t} = 0$$

$$s \in [t - T + 1, t]$$

siendo $D_{s,t} = A_{t+1} L_{s,t+1}^{1-\alpha} (q_{s-1} I_s E_{s,t+1})^{\alpha}$

$$\omega_t = \lambda_t d_t \theta u_t^{\theta-1} [q_{t-1}^0 - q_{t-1}] \quad (9)$$

$$U'(C_t) = \frac{\alpha}{I_t} (q_{t-1} I_t)^{\alpha} \sum_{s=t}^{t+T} \beta^{(s-t)} A_s L_{t,s}^{1-\alpha} E_{t,s}^{\alpha} U'(C_s) \quad (10)$$

$$\alpha q_t^{\alpha-1} \sum_{s=t+1}^{t+T+1} \beta^{(s-t)} A_s L_{t+1,s}^{1-\alpha} (I_{t+1} E_{t+1,s})^{\alpha} U'(C_s) = \lambda_t - \beta \lambda_{t+1} [1 - d u_{t+1}^{\theta}] \quad (11)$$

y la condición de transversalidad:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t q_t = 0 \quad (12)$$

donde ω_t y λ_t son los multiplicadores asociados a las restricciones (5) y (3) respectivamente. Las ecuaciones (7)-(9) son las condiciones de optimalidad con respecto al trabajo destinado a la producción, al mantenimiento y a la adopción. El mantenimiento del capital más antiguo es igual a cero ya que se desechará del sistema productivo en el periodo siguiente independientemente de su tasa de depreciación física. La ecuación (10) establece la regla óptima de inversión en t : el beneficio marginal esperado de la inversión es igual a su coste marginal que, en nuestra economía con un único bien final, es la pérdida de utilidad debida a la disminución marginal en el consumo. La ecuación (11) determina el nivel tecnológico real igualando el coste marginal al rendimiento marginal de la adopción. El coste marginal es igual al precio sombra de q_t menos el aumento potencial de esta misma variable de t a $t + 1$. La ganancia potencial incorpora un término positivo $\beta \lambda_{t+1} du_{t+1}^\theta$, que captura la pérdida de valor debida a futuras mejoras tecnológicas. A continuación definimos un equilibrio para la economía de la siguiente forma:

Definición 1. Dadas las condiciones iniciales K_{-1} , q_{-1} , un equilibrio es una senda $\{\{L_{s,t}\}_{s=t-T}^t, \{m_{s,t}\}_{s=t-T}^t, u_t, I_t, q_t, C_t, Y_t\}_{t \geq 0}$, que satisface las restricciones (1)-(6), las condiciones de primer orden (7)-(12) y las restricciones de positividad estándares.

En equilibrio podemos agregar las variables tal como se muestra en la siguiente proposición y cuya demostración se adjunta en el Apéndice.

Proposición 1. Sea

$$Y_t = \sum_{s=t-T}^t Y_{s,t}, \quad L_t = \sum_{s=t-T}^t L_{s,t} \quad \text{y} \quad K_t = \sum_{s=t-T}^t q_{s-1} K_{s,t}$$

En equilibrio, existe una función de producción agregada tal que:

$$Y_t = A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$$

Esta proposición extiende el resultado de agregación de Solow (1960) a modelos de depreciación *one-hoss shay*, ya que el modelo de Solow es un caso particular de nuestro modelo cuando T tiende a infinito. En el epígrafe siguiente estudiamos las sendas de crecimiento equilibrado generadas por el modelo en el equilibrio.

3.1. Sendas de crecimiento equilibrado

Un primer requisito que deberían cumplir las sendas de crecimiento equilibrado es la invariabilidad de las distribuciones de trabajo destinado al mantenimiento y a la producción a lo largo del tiempo. Esta condición la podemos expresar como:

$$\begin{aligned} \{L_{s,t}\}_{-T} &= \{L_{s,t}\}_{-T+n}^{+n} \quad \forall n \geq 0 \\ \{n_{s,t}\}_{-T} &= \{n_{s,t}\}_{-T+n}^{+n} \quad \forall n \geq 0 \end{aligned}$$

que es equivalente a encontrar dos secuencias, $\{L_s\}_{s=1}^T$ y $\{m_s\}_{s=1}^T$, donde L_1 (Resp. m_1) es el trabajo dedicado a la producción (Resp. mantenimiento) asociado al *vintage* más nuevo, y L_T (Resp. m_T) es el trabajo destinado a la producción (Resp. mantenimiento) con el capital más antiguo. $\delta_{s,t}(m_{s,t})$. Para garantizar la condición anterior no imponemos ninguna restricción general sino que desarrollamos un caso en el cual dicha condición está asegurada. Obsérvese que la función de depreciación $\delta_{s,t}(\cdot)$ puede depender de t para un S fijo debido a que la actividad de mantenimiento puede verse afectada por el progreso técnico. A partir de ahora supondremos que para esta actividad no hay mejoras de productividad a lo largo del tiempo, es decir, las funciones de depreciación no dependen del tiempo.

$$\delta_{s,t}(m_{s,t}) = \delta_s(m_{s,t}), \quad \forall s = 1, \dots, T, \quad \forall n \geq 0$$

En este caso podemos reescribir la secuencia $E_{s,t}$ como:

$$\begin{aligned} E_s &= \prod_{j=1}^{s-1} [1 - \delta_j(m_j)], \quad s > 1 \\ E_1 &= 1 \end{aligned}$$

Con estas especificaciones, las sendas de crecimiento equilibrado para esta economía se pueden definir de la siguiente forma:

Definición 2. Una senda de crecimiento equilibrado para nuestra economía es una situación en la cual: (i) el trabajo destinado a la adopción tecnológica es constante, (ii) las distribuciones del trabajo destinado a la producción y al mantenimiento entre generaciones de capital no varían en el tiempo, (iii) el progreso técnico real crece a tasa γ , (iv) producción, consumo e inversión crecen a tasa $\gamma^{\alpha/1-\alpha}$, y (v) se cumplen todas las condiciones de equilibrio enumeradas en la Definición 1.

En el Apéndice se recoge el sistema de ecuaciones de largo plazo. Las condiciones (iii) y (iv) se pueden obtener de manera trivial de las condiciones de equilibrio. Para poder computar dicho sistema de ecuaciones es necesario especificar las funciones de depreciación de manera explícita, tal como hacemos en el siguiente epígrafe.

3.2. Caracterización de las sendas de crecimiento equilibrado para una clase de funciones de depreciación

Establecemos la siguiente especificación para la función de depreciación:

$$\delta_s(m_s) = a - c_s m_s^b$$

$$b < 1$$

donde a , y la secuencia c_s , $s = 1, \dots, T$, son números positivos tal que $c_s \leq a$, $\forall s$. La secuencia $\underline{\delta}_s = a - c_s$, $s = 1, \dots, T$, caracteriza un tipo de depreciación «natural», esto es, aunque todos los recursos de trabajo destinados al mantenimiento se asignaran a la generación de capital s , la tasa de depreciación sería positiva. Cuando no se asigna factor trabajo a la actividad de mantenimiento, $\delta_s(0) = \bar{\delta}_s = a$, $\forall s$. Por lo tanto, el parámetro a mide la depreciación física cuando no se destinan recursos al mantenimiento. Por simplicidad, suponemos que a y b no dependen de la edad del capital.

Para reflejar que el mantenimiento puede ser igual o más efectivo para los nuevos bienes de capital, y como c_s se puede interpretar como un parámetro de productividad, suponemos que la secuencia c_s , $s = 1, \dots, T$, es decreciente, $c_s \leq c_{s-1}$. Parece razonable que el mantenimiento sea *a priori* mucho menos efectivo para los bienes de capital más antiguos tal como sugiere, por ejemplo, el mantenimiento de los coches. En la Proposición 2 caracterizamos las distribuciones del trabajo destinado a la producción y al mantenimiento. Para simplificar el álgebra, suponemos que la función de utilidad es logarítmica.

Proposición 2. Si existe una senda de crecimiento equilibrado, las secuencias L_s y m_s , $s = 1, \dots, T$ son estrictamente decrecientes.

La prueba de esta proposición se encuentra en el Apéndice. El resultado relativo a la distribución del trabajo destinado a la producción de bien final es consistente con la literatura empírica. Davis, Haltiwanger y Schuh (1996) obtienen que el empleo asociado con una máquina es una función decreciente de su edad. Otros estudios empíricos que analizan la creación y destrucción de empleo a nivel de planta también destacan esta propiedad (Dunne, Roberts y Samuelson, 1989, entre otros). En nuestro modelo, cuando el progreso técnico está incorporado en los bienes de inversión, el planificador asigna más factor trabajo a los bienes de capital más nuevos. El mismo argumento se aplica a los resultados de la distribución estacionaria del trabajo destinado al mantenimiento: la mayor parte de los recursos de trabajo, tanto para la producción como para el mantenimiento, deberían asignarse a los bienes de capital más nuevos, ya que son éstos los que incorporan los últimos avances tecnológicos disponibles en la economía. En la Proposición 3 se establece la existencia y unicidad del equilibrio en el largo plazo.

Los parámetros a , A , α , β y γ han sido elegidos de acuerdo a valores aceptados en la literatura. Fijamos T igual a 7 en el caso de referencia, aunque posteriormente analizaremos cómo afecta el valor de T a los resultados del modelo³. El valor de c_s se fija de la siguiente forma: para los bienes de capital recién incorporados, la tasa de depreciación es cero si todos los recursos de trabajo se destinan a su mantenimiento ($a = c_1 = 1$). Para los bienes del segundo *vintage*, el parámetro de productividad c_2 empeora un 2 por 100 con respecto a c_1 , c_3 empeora un 2 por 100 con respecto a c_2 , y así sucesivamente. La elección del resto de los parámetros genera los valores de largo plazo recogidos en la Tabla 2.

TABLA 2
PROPIEDADES DE LARGO PLAZO

L	M	u	$\frac{l}{Y}$	$\frac{w^*u}{Y}$	$\frac{w^*M}{Y}$
0,9226	0,0258	0,051	0,322	0,0798	0,04

La cantidad total de trabajo destinado a la producción, L , es el 92,2 por 100 del total de los recursos de trabajo, mientras que la cantidad total destinada al mantenimiento M y a la adopción es un 2,6 por 100 y 5,1 por 100 respectivamente. Estos valores implican un ratio consumo-renta de dos tercios y unos costes de mantenimiento y de adopción en términos de PIB en torno al 4 por 100 y al 8 por 100 respectivamente, que son valores cercanos a los presentados en la literatura relacionada (véase McGrattan y Schmitz, 1999, y Jovanovic, 1997). Las Figuras 1 y 2 muestran las distribuciones de trabajo asignado al mantenimiento y a la producción. Tal como señala la literatura empírica (véase de nuevo Davis, Haltiwanger y Schuh, 1996), el trabajo destinado a la producción no se distribuye uniformemente entre los distintos bienes de capital. Los bienes de capital más eficientes contratan al 42 por 100 del total asignado a la producción, y el capital de la segunda generación utiliza un 25 por 100, con lo cual más de dos tercios del trabajo asignado a la producción se asigna a las dos generaciones de capital más recientes. Esta diferencia es más acentuada en la distribución de trabajo asignado al mantenimiento: alrededor de un 75 por 100 del total se asigna a las dos generaciones más nuevas. Los diferenciales de productividad entre los bienes de capital consecutivos y el hecho de que la eficiencia del mantenimiento sea decreciente con la edad de dichos bienes explican el resultado obtenido.

³ La elección de $T = 7$ para el caso de referencia se debe a la búsqueda de un equilibrio entre el volumen computacional y la robustez de los resultados en las simulaciones dinámicas que presentamos en la última sección de este trabajo.

FIGURA 1

MANTENIMIENTO POR VINTAGE

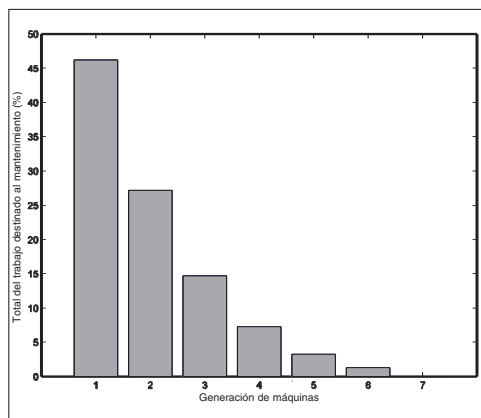
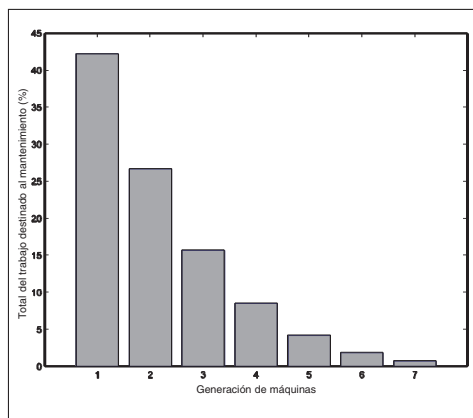


FIGURA 2

PRODUCCIÓN POR VINTAGE



En las Figuras 3-7 se muestra la sensibilidad de este resultado al valor de T (aumenta de 5 a 15). Este ejercicio revela, en primer lugar, que un aumento en la edad de las máquinas eleva la cantidad de recursos destinados a su mantenimiento y a la producción, pero disminuye la cantidad de trabajo asignada a la adopción. Esta es una buena propiedad si pensamos en cómo debería interaccionar el proceso de adopción con el proceso de reemplazo. Cuando el progreso técnico es específico a los nuevos bienes de inversión, un aumento del esfuerzo en adopción implica un mayor diferencial de productividad entre generaciones de capital consecutivas, induciendo a una sustitución más rápida de los bienes de capital. Por lo tanto, si la regla de reemplazo fuera endógena, el esfuerzo en adopción y la sustitución de tecnologías irían en direcciones opuestas. En nuestro modelo el reemplazo es exógeno pero se mantiene la misma correlación negativa con el esfuerzo en adopción. Obsérvese que un aumento de T lleva a que todas las variables «convergan» rápidamente a valores límite, que probablemente son los verdaderos límites matemáticos de dichas variables cuando T tiende a infinito.

En segundo lugar, la desigualdad (medida por el porcentaje de trabajo asignado al capital más nuevo, véase Figuras 5 y 6) de las distribuciones de trabajo destinado a la producción y mantenimiento disminuye ligeramente cuando T aumenta. El envejecimiento de los bienes de capital parece desviar recursos de los bienes de capital más eficientes a los menos eficientes. Si la regla de reemplazo fuera endógena, el planificador o la empresa tendrían en cuenta este coste y tenderían a acelerar el reemplazo. A continuación estudiamos numéricamente la dinámica a largo plazo con respecto a la tasa de progreso técnico incorporado, γ . La Tabla 3 recoge los resultados obtenidos.

FIGURA 3

M

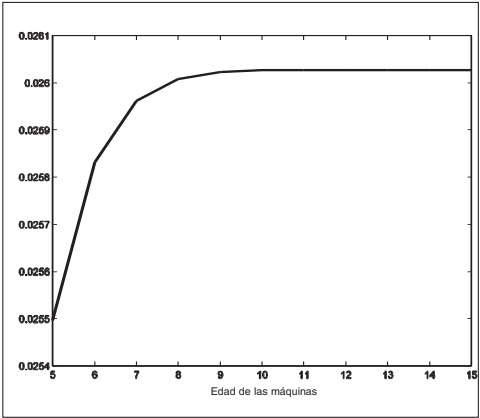


FIGURA 4

L

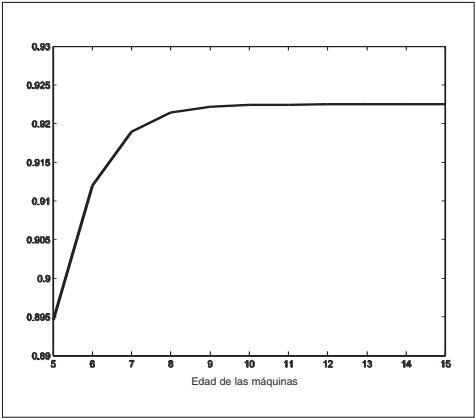


FIGURA 5

m1/M

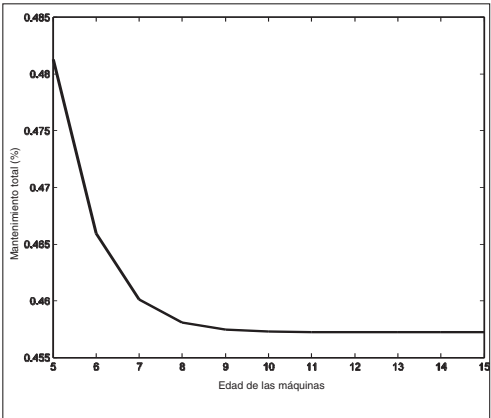


FIGURA 6

L1/L

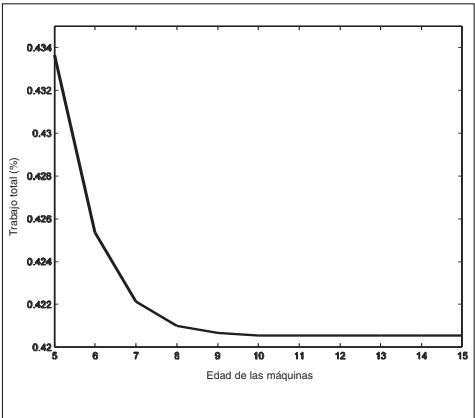


FIGURA 7

u

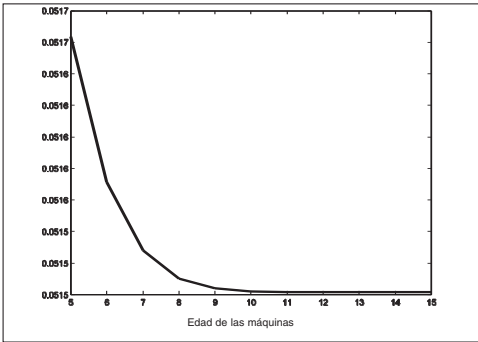


TABLA 3
EFFECTOS A LARGO PLAZO DE UN AUMENTO EN γ

γ	L	M	u
1 por 100	0,9223	0,02584	0,051851
5 por 100	0,9211	0,025796	0,053107
10 por 100	0,9196	0,025731	0,054638

Cuando la frontera tecnológica se desplaza, el esfuerzo en adopción debe aumentar (un 0,6 por 100 cuando γ aumenta un 1 por 100) a costa de las actividades de mantenimiento y producción. Sin embargo, un aumento considerable de u resultaría perjudicial para el consumo y la producción vía la reducción del trabajo destinado al mantenimiento y a la producción. Por tanto, u aumenta pero en menor magnitud que la aceleración tecnológica (casi la mitad en nuestro experimento). La Tabla 3 también muestra los resultados correspondientes a shocks de mayor magnitud. Los resultados son consistentes con la no linealidad débil del modelo, al menos en torno al estado estacionario, que dificulta que los shocks (si no son de gran magnitud) generen respuestas considerables. No hemos incluido en la Tabla 3 los resultados correspondientes a la distribución del factor trabajo entre *vintages*, ya que indican que dicha distribución es muy poco sensible a variaciones del progreso técnico. Evidentemente, ésto no significa que la reasignación a corto plazo sea también insignificante. Este aspecto se analiza, entre otras cuestiones relevantes, en la próxima sección.

Por último, es importante destacar que cuando se modifica la asignación de trabajo entre actividades, la producción y el mantenimiento (total y para los bienes de capital más eficientes) varían en la misma dirección, y la adopción se mueve en dirección opuesta. Tal como se argumenta en la introducción, la relación entre el mantenimiento y la adopción es *a priori* ambigua cuando el progreso técnico está incorporado en los bienes de capital. Un aumento en la adopción provocaría mayor o menor esfuerzo en adopción dependiendo de si el planificador da más importancia al aumento de la eficiencia de los bienes de capital en uso, o al aumento en el diferencial de productividad entre el bien de capital más reciente y los que llegarán en el futuro. Nuestros resultados sugieren que el segundo factor predomina y el mantenimiento y la adopción se mueven en direcciones opuestas cuando γ aumenta. Boucekine, Martínez y Saglam (2003) obtienen un resultado similar bajo progreso técnico neutral. Por lo tanto parece que esta propiedad no depende de la naturaleza del progreso técnico.

Indudablemente, este resultado se debe parcialmente a los supuestos de homogeneidad y escasez del factor trabajo. Sin embargo, el hecho de que el trabajo destinado a mantenimiento y producción reaccionen en direcciones opuestas no es trivial. Mantenimiento y adopción actúan en la función de producción a través del stock de capital (en unidades de eficiencia); el mantenimiento reduce la deprecia-

ción del capital y la adopción aumenta la eficiencia del capital (vía el progreso técnico incorporado, q). Como consecuencia, un aumento simultáneo de m y u induce un doble incremento en K y una doble reducción del trabajo destinado a la producción. En ninguna las simulaciones realizadas hemos obtenido este posible resultado. Más bien parece que el planificador trata el mantenimiento y la producción de la misma forma. Las dos actividades atañen a los aspectos «cuantitativos» de la producción (la depreciación física del capital y el trabajo utilizado en la producción, respectivamente), mientras que la adopción controla la eficiencia o la «calidad» del capital en funcionamiento. El planificador determina el diseño óptimo del sistema de producción eligiendo la calidad del capital (a través de la adopción) y ajustando las características cuantitativas (a través del trabajo destinado a la producción y al mantenimiento).

4. Dinámica a corto plazo

En esta sección consideramos dos shocks permanentes, positivos y no anticipados en γ y en A ⁴. Las Figuras 8-14 muestran, para cada variable $(x)_t$, el valor «multiplicador» $\frac{x(t) - x^*}{x^*} \cdot 100$, donde x^* es el valor correspondiente al equilibrio de largo plazo inicial.

4.1. Progreso tecnológico neutral vs. específico

En primer lugar se observa que a corto plazo un shock en A tiene mayor impacto que un shock en γ . Este resultado no es sorprendente ya que el shock en A afecta a todo el stock de capital (independientemente de su eficiencia) mientras que el shock en γ sólo afecta a los nuevos bienes de inversión. En segundo lugar, la dinámica a corto plazo de dichos shocks relativa a la asignación de trabajo entre actividades es sustancialmente diferente (como ocurre también con la dinámica a largo plazo). Un aumento en A tiene un efecto directo en la productividad marginal del trabajo, induciendo a un aumento en el trabajo asignado a la producción. Este incremento es, en términos relativos, mucho mayor que cuando aumenta γ , y es decisivo en el problema de reasignación del factor trabajo después del shock. De hecho, el shock en el nivel de progreso técnico neutral genera a corto plazo una correlación positiva entre las sendas de adopción y mantenimiento, que se desvanece a largo plazo.

⁴ Utilizamos Dynare, un paquete informático para la simulación de modelos no lineales con expectativas racionales diseñado por JUILLARD (1996) y basado en un algoritmo desarrollado por BOUCEKKINE (1995). Comprobamos que el equilibrio de largo plazo antes y después del shock es punto de silla.

FIGURA 8
TRABAJO DESTINADO A MANTENIMIENTO

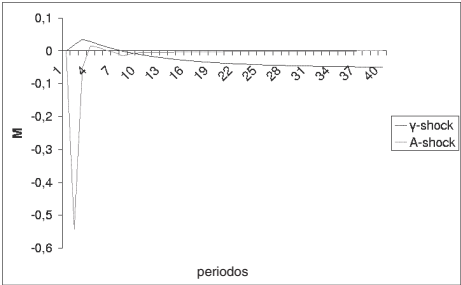


FIGURA 9
TRABAJO DESTINADO A PRODUCCIÓN

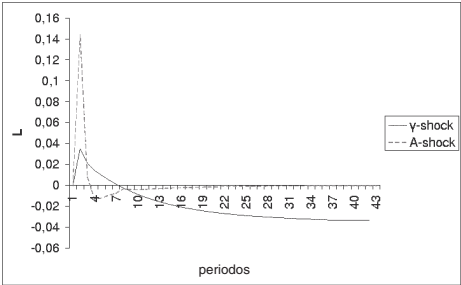


FIGURA 10
TRABAJO DESTINADO A LA ADOPCIÓN

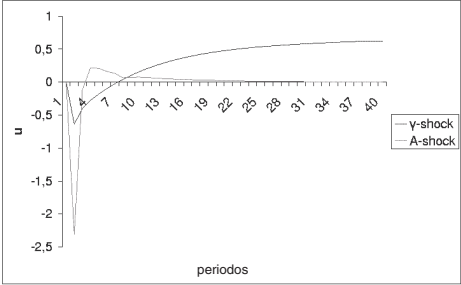


FIGURA 11
L1/L

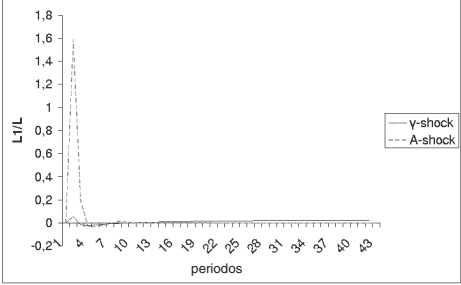


FIGURA 12
L1/L2

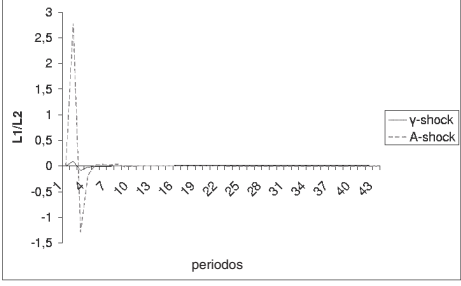


FIGURA 13
m1/M

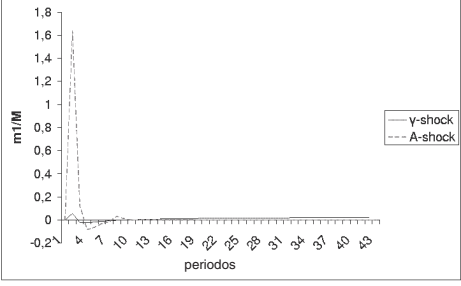
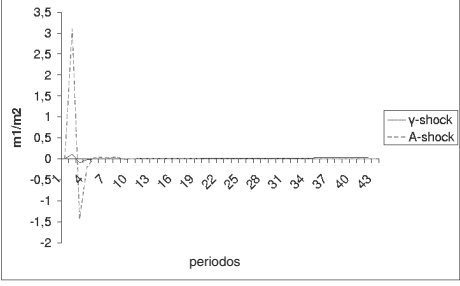


FIGURA 14
M1/M2



Por el contrario el aumento en γ genera un mecanismo mucho más complejo. En el largo plazo debería aumentar el esfuerzo en adopción para reducir la brecha tecnológica. Sin embargo, ésta no es necesariamente la respuesta óptima a corto plazo. Por una parte, el planificador sabe que el shock es permanente y como debe preocuparse por la senda de consumo, podría decidir aplazar el esfuerzo en adopción y asignar más recursos a la producción en el corto plazo. Como las ganancias en términos de conocimiento acumulado son pequeñas cerca de $t = 0$, el planificador podría encontrar óptimo retrasar la adopción. Este argumento es matemáticamente trivial en nuestro modelo: si γ aumenta a γ' , el cambio en la frontera tecnológica es $e^{(\gamma' - \gamma)t} - 1$, que tiende a 0 cuando t tiende a 0. Por otra parte, el modelo genera un retardo endógeno en el proceso de adopción sin necesidad de un retardo de implementación-transmisión exógeno. Las Figuras 8-10 ilustran estos argumentos. El esfuerzo de adopción está por debajo del valor estacionario inicial durante 8 periodos, mientras que los recursos destinados a mantenimiento y especialmente a la producción permanecen por encima de su valor de equilibrio inicial.

Por último, las Figuras 11-14 muestran el efecto de los shocks en las distribuciones de trabajo destinado al mantenimiento y a la producción. Los resultados obtenidos confirman nuestra interpretación de la dinámica a largo plazo recogida en el epígrafe 3.3. Lo que determina principalmente la evolución de dichas distribuciones es el problema de asignación de recursos entre actividades. Cuando A aumenta, se libera factor trabajo hacia la producción y se dirige fundamentalmente hacia el capital más eficiente. Cuando γ aumenta los recursos extras de trabajo canalizados hacia la producción son mucho menores y, aparentemente, la reasignación favorable a los bienes de inversión más nuevos es mucho menor.

El mismo resultado se obtiene en relación a la evolución de la distribución del trabajo destinado al mantenimiento cuando γ aumenta. Sin embargo, cuando A aumenta los recursos totales destinados a mantenimiento disminuyen, pero la proporción asignada a los bienes de capital más eficientes aumenta considerablemente. En conjunto, el mayor impacto del shock en A relativo a la reasignación del trabajo es debido a que afecta a todo el stock de capital, a diferencia del progreso técnico incorporado⁵. Por último, mencionar que la convergencia a los valores de largo plazo del trabajo destinado al mantenimiento y a la producción por *vintage* es oscilatorio, tal como se refleja en las Figuras 11-14. Esta es una de las principales características de los modelos de generaciones de capital, y de los modelos *one-hoss shay* en particular (véase Boucekkine *et al.*, 2005, para un enfoque matemático)⁶.

⁵ Existen algunos trabajos que comparan las características de la recolocación del factor trabajo dependiendo de la naturaleza del progreso técnico. Entre ellos, MORTENSEN y PISSARIDES (1998). Sin embargo, estos artículos se centran en el análisis de largo plazo y no presentan ningún resultado a corto plazo que pudieramos comparar con los obtenidos en este trabajo.

⁶ De hecho el modelo linealizado en torno a la senda de crecimiento equilibrado muestra autovaleores no reales y complejos, lo que parece guiar la dinámica de las variables por *vintage*.

4.2. Robustez de los resultados

En esta sección se analiza la robustez de los principales resultados a variaciones en los valores de los parámetros. Para ello nos centramos en dos características del modelo: (i) la existencia de una fase de adopción no intensiva durante la cual los recursos destinados a la adopción son menores que el valor inicial de largo plazo; (ii) la relación entre la recolocación de trabajo entre los distintos *vintages* y la edad del capital, T .

4.2.1. La fase de adopción no intensiva

Suponemos un shock permanente y no anticipado del 1 por 100 en γ para $\gamma = 1$ por 100 y para $\gamma = 2$ por 100. Los resultados se presentan en la Figura 15. Para ambos valores de γ se obtiene una fase de adopción no intensiva, aunque para $\gamma = 2$ por 100 el descenso inicial en el esfuerzo de adopción es mayor y la fase de adopción no intensiva es visiblemente más corta. No es difícil entender este comportamiento: las mejoras tecnológicas en el entorno de $t = 0$ son pequeñas independientemente del valor de γ y de la magnitud de la aceleración tecnológica, y por tanto no es óptimo empezar la fase de adopción masiva a partir de $t = 0$. Además, a largo plazo un mayor γ implica mayor cantidad de recursos destinados a la adopción. La combinación de estas dos características de largo y corto plazo explica la obtención de una fase no intensiva más corta pero más «drástica» cuando $\gamma = 2$ por 100. Además, como mayores valores de γ también implican mayores recursos de trabajo destinados a la adopción en el largo plazo (a costa del trabajo asignado al mantenimiento y a la producción), el planificador puede elegir equilibrar esta reasignación mediante una caída drástica en el trabajo destinado a la adopción durante una breve fase inicial, para valores de γ suficientemente grandes.

Realizamos el mismo experimento para el nivel de progreso técnico neutral. Suponemos, de nuevo, un shock no anticipado y permanente en A para $A = 1$ y para $A = 1,1$. También encontramos una fase inicial de adopción no intensiva, como señala la Figura 16 pero, a diferencia del shock en γ , la transición hacia el estado estacionario es exactamente la misma. El progreso técnico neutral no tiene ningún impacto en el trabajo asignado a la adopción en el largo plazo y no hay ningún *trade-off* entre el corto y el largo plazo. Para cualquier valor de A el trabajo destinado a adopción disminuye en el corto plazo como un simple efecto de reasignación de recursos favorable a la producción y al mantenimiento. Teniendo en cuenta nuestra modelización para el sector tecnológico, el valor de A es irrelevante para la duración de la fase inicial de adopción.

FIGURA 15
TRABAJO ASIGNADO A ADOPCIÓN

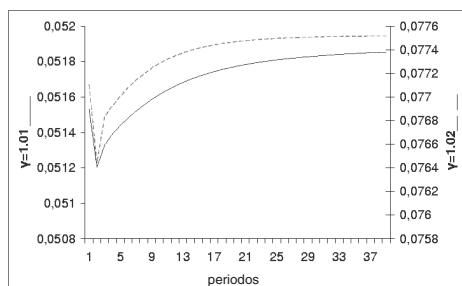
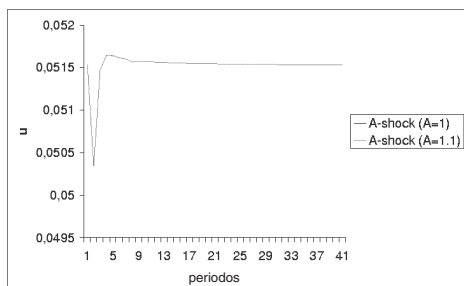


FIGURA 16
TRABAJO ASIGNADO A ADOPCIÓN



4.2. Distribución del factor trabajo y vida útil de los bienes de capital

Para finalizar estudiamos cómo afecta la vida útil del capital a la reasignación del factor trabajo en el corto plazo. Las Figuras 17-20 muestran que ante un aumento en la tasa de progreso técnico incorporado, la cantidad óptima de recursos que se destinan al bien de capital más nuevo (mantenimiento y producción) es creciente con la vida del capital. La cantidad de recursos asignados al mantenimiento del primer *vintage* cuando $T = 7$ es más del doble que la asignada para $T = 3$ ⁷. La reasignación óptima de trabajo entre los distintos bienes de inversión implica magnitudes mayores a medida que el capital envejece. En estas circunstancias, los recursos totales destinados a mantenimiento deberían aumentar en el corto y en el largo plazo, y gran parte de este incremento debería asignarse a los bienes de capital más eficientes.

FIGURA 17
L1/L

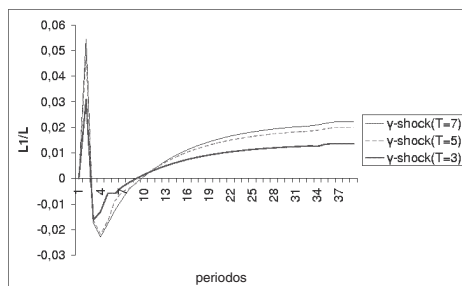
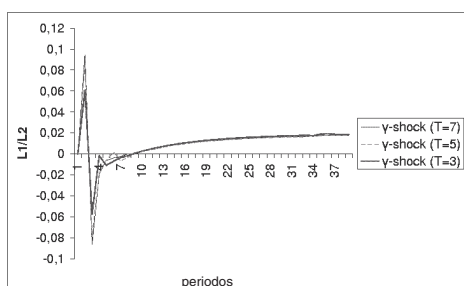


FIGURA 18
L1/L2



⁷ También obtenemos la dinámica compleja registrada para las magnitudes por *vintage*, típicas de los modelos *one-hoss-shay*.

FIGURA 19
M1/M

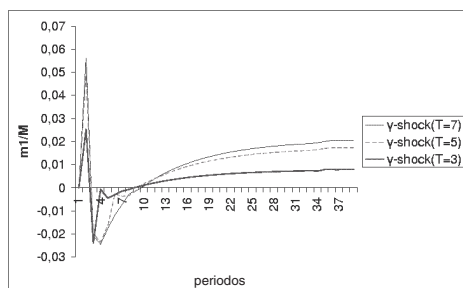
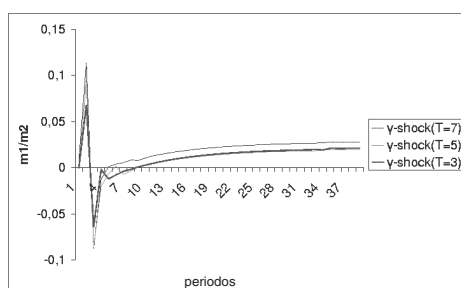


FIGURA 20
M1/M2



5. Conclusiones

Este trabajo intenta extraer algunas lecciones útiles sobre el diseño óptimo de las decisiones de adopción, mantenimiento y producción en países no innovadores y sujetos a avances tecnológicos exógenos y específicos a los bienes de inversión. Para ello, hemos considerado la clase de modelos *one-hoss shay* de generaciones de capital con recursos laborales fijos. Nuestro análisis también se aplica al caso límite en el que la vida de los bienes de capital tiende a infinito. Además de la caracterización matemática de las sendas de crecimiento equilibrado, resumimos a continuación los resultados más interesantes que hemos obtenido:

- a) A largo plazo, un shock en el nivel de progreso técnico neutral no tiene ningún efecto sobre la asignación óptima de los recursos laborales entre actividades y entre *vintages*. Por el contrario, una aceleración de la tasa de crecimiento del progreso técnico incorporado altera las distribuciones mencionadas en el largo plazo. Los recursos destinados a mantenimiento y producción se mueven en la misma dirección mientras que el trabajo destinado a la adopción varía en dirección opuesta. La correlación entre mantenimiento y adopción parece ser independiente de la naturaleza del progreso técnico, más bien es consecuencia de un diseño óptimo del sistema de producción entre calidad y cantidad.
- b) A largo plazo, un aumento de la vida útil de los bienes de capital reduce el esfuerzo destinado a la adopción y aumenta los recursos asignados al mantenimiento y a la producción.
- c) A corto plazo, cada uno de los shocks analizados muestra resultados específicos. El progreso tecnológico neutral conlleva una reasignación masiva del factor trabajo favorable a la producción, y se destinan más recursos a la producción y al mantenimiento del capital más productivo. El trabajo total destinado al mantenimiento y a la adopción disminuye.

- d) Cuando aumenta la tasa de progreso técnico incorporado la economía retrasa la fase intensiva de adopción. Esta propiedad del modelo es independiente de cualquier retardo de implementación o aprendizaje y se debe a que en el marco de crecimiento óptimo, las ganancias de acelerar la acumulación de conocimiento en el entorno de $t = 0$ son pequeñas, independientemente del valor de γ y de la magnitud del shock. La duración de la fase no intensiva de adopción es decreciente con la tasa de progreso técnico incorporado.
- e) Durante la fase no intensiva de adopción, el trabajo destinado al mantenimiento y a la producción es relativamente alto. En particular, durante este periodo el mantenimiento actúa como un sustituto transitorio a la adopción.
- f) La magnitud de la reasignación óptima del factor trabajo es muy dependiente de (y creciente con) la edad del capital. En este contexto, la respuesta óptima a mejoras tecnológicas debería incluir un aumento del factor trabajo destinado a mantenimiento tanto a corto como a largo plazo, y especialmente en la cantidad de trabajo asignada al bien de capital más eficiente.

6. Referencias bibliográficas

- [1] BENHABIB, J. y RUSTICHINI, A. (1991): «Vintage Capital, Investment and Growth», *Journal of Economic Theory*, 55, 323-339.
- [2] BOUCEKKINE, R. (1995): «An alternative methodology for solving nonlinear forward-looking models», *Journal of Economic Dynamics and Control*, 19, 711-734.
- [3] BOUCEKKINE, R.; GERMAIN, M. y LICANDRO, O. (1997): «Replacement Echoes in the Vintage Capital Growth Models», *Journal of Economic Theory*, 74, 333-348.
- [4] BOUCEKKINE, R.; MARTÍNEZ, B. y SAGLAM, C. (2003): «Technology Adoption, Capital Maintenance and the Technological Gap». *IVIE Discussion Paper* 2003-18.
- [5] BOUCEKKINE, R. y RUIZ-TAMARIT, J. R. (2003): «Capital Maintenance and Investment: Complements or Substitutes?», *Journal of Economics*, 78, 1-28.
- [6] BOUCEKKINE, R.; LICANDRO, L.; PUCH, L. y DEL RIO, F. (2005): «Vintage Capital and the Dynamics of the AK Model», *Journal of Economic Theory*, 120, 39-72.
- [7] CABALLERO, R. y JAFFEE, A. (1993): «How High are the Giant's Shoulders? An Empirical Assessment of Knowledge Spillovers and Creative Destruction in a Model of Economic Growth», *NBER Macroeconomics Annual*, 15-74.
- [8] COLLARD, F. y KOLLINTZAS, T. (2000): «Maintenance, Utilization and Depreciation along the Business Cycle», *CEPR Discussion Paper* 2477.
- [9] DAVIS, S.; HALTIWANGER, J. y SCHUH, S. (1996): *Job Creation and Destruction*, Cambridge MA, MIT Press.
- [10] DUNNE, T.; ROBERTS, M. y SAMUELSON, L. (1989): «Plant Turnover and Gross Employment Flows in the U.S. Manufacturing Sector», *Journal of Labor Economics*, 7 (1), 48-71.
- [11] GRETHER, J.-M. (1999): «Determinants of Technological Diffusion in Mexican Manufacturing: A Plant-Level Analysis», *World Development*, 27 (1999), 1287-98.
- [12] JOVANOVIĆ, B. (1997): «Learning and Growth», en D. Kreps y K. Wallis (eds.), *Advances in economics*, vol. 2, Cambridge University Press, Londres, 318-339.

- [13] JUILLARD, M. (1996): «DYNARE, a Program for the Resolution of Nonlinear Models with Forward-Looking Variables. Release 2.1», CEPREMAP.
- [14] KALAITZIDAKIS, P. y KALYVITIS, S. (2005): «“New” Public Investment and/or Public Capital Maintenance for Growth? The Canadian Experience», *Economic Inquiry*, 43 (3), 586-600.
- [15] LICANDRO, O. y PUCH, L. (2000): «Capital utilization, Maintenance Costs and the Business Cycle», *Annales d'Economie et Statistique*, 58, 143-164.
- [16] LICANDRO, O.; PUCH, L. y RUIZ-TAMARIT, R. (2001): «Optimal Growth under Endogenous Depreciation, Capital Utilization and Maintenance Costs», *Investigaciones Económicas*, XXV (3), 543-559.
- [17] MCGRATTAN, E. y SCHMITZ, J. (1999): «Maintenance and Repair: Too Big to Ignore», *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review*, 23, 2-13.
- [18] MORTENSEN, D. y PISSARIDES, C. (1998): «Technological Progress, Job Creation and Job Destruction», *Review of Economic Dynamics*, 1, 733-753.
- [19] NELSON, R. y PHELPS, E. (1966): «Investment in Humans, Technology Diffusion and Economic Growth», *American Economic Review*, 56, 69-75.
- [20] NICKELL, S. (1975): «A Closer Look at Replacement Investment», *Journal of Economic Theory*, 10, 54-88.
- [21] PAHM, H. y WANG, H. (1996): «Imperfect Maintenance», *European Journal of Operation Research*, 94, 425-438.
- [22] SOLOW, R. (1960): «Investment and Technological Progress», en Kenneth J. Arrow, Samuel Karlin y Patrick Suppes (eds.), *Mathematical Methods in the Social Sciences*, 1959, Standford University Press, 89-104.
- [23] TIFFEN, M. y MORTIMORE, M. (1994): «Malthus Controverted: The Role of Capital and Technology in Growth and Environment Recovery in Kenya», *World Development*, 22, 997-1010.

APÉNDICE

1. Prueba de la Proposición 1: Definimos el stock de capital eficiente como:

$$K_t = \sum_{s=t-T}^t q_{s-1} I_s E_{s,t}$$

Es la suma de las máquinas en operación ponderadas por su respectiva productividad (todas las máquinas que lleven en operación más de T periodos son apartadas del sistema productivo). A partir de (7), podemos expresar la demanda de trabajo en términos del capital:

$$L_{s,t} = \left[\frac{(1-\alpha)A_t U'(C_t)}{w_t} \right]^{\frac{1}{\alpha}} q_{s-1} I_s E_{s,t}$$

que implica la expresión siguiente para el trabajo destinado a la producción, en el agregado en t :

$$L_t = \sum_{s=t-T}^t L_{s,t} = \left[\frac{(1-\alpha)A_t U'(C_t)}{w_t} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{s=t-T}^t q_{s-1} I_s E_{s,t} \quad (13)$$

$$L_t = \left[\frac{(1-\alpha)A_t U'(C_t)}{w_t} \right]^{\frac{1}{\alpha}} K_t$$

Como la producción total en t viene dado por la suma de lo producido con todos los *vintages* activos en t :

$$Y_t = \sum_{s=t-T}^t A_t (q_{s-1} K_{s,t})^{\alpha} L_{s,t}^{1-\alpha}$$

teniendo en cuenta (13), obtenemos:

$$Y_t = \left[\frac{(1-\alpha)A_t U'(C_t)}{w_t} \right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \sum_{s=t-T}^t A_t (q_{s-1} I_s L_{s,t})^{\alpha} (q_{s-1} I_s E_{s,t})^{1-\alpha}$$

Como

$$\left[\frac{(1-\alpha)A_t U'(C_t)}{w_t} \right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} = \left(\frac{L T_t}{K_t} \right)^{1-\alpha}$$

obtenemos:

$$Y_t = A_t K^{\alpha} L^{1-\alpha}$$

2. Condiciones de equilibrio a largo plazo

$$\begin{aligned}
 (1 - \alpha)A(qIE_s)^\alpha L_s^{1-\alpha} \gamma^{\frac{\alpha^2 - \alpha s}{1-\alpha}} &= wC \quad s \in [1, T] \\
 \beta \alpha A(qIE_s)^\alpha \gamma^{\frac{\alpha^2 - \alpha s}{1-\alpha}} \frac{[-\delta'_{s-1}(m_{s-1})]}{1 - \delta_{s-1}(m_{s-1})} &= wC \quad s \in [2, T] \\
 m_T &= 0 \\
 I &= \alpha A(qI)^\alpha \sum_{s=1}^T \beta^{s-1} E_s^\alpha L_s^{1-\alpha} \gamma^{\frac{\alpha^2 - \alpha s}{1-\alpha}} \\
 \alpha A(qI)^\alpha \sum_{s=1}^T \beta^s E_s^\alpha L_s^{1-\alpha} \gamma^{\frac{\alpha^2 - \alpha s}{1-\alpha}} &= \frac{wCq[\gamma - \beta(1 - du^\theta)]}{d\theta u^{\theta-1}(1-q)} \\
 Y &= A \sum_{s=1}^T (qIE_s)^\alpha L_s^{1-\alpha} \gamma^{\frac{\alpha^2 - \alpha s}{1-\alpha}} \\
 \frac{1-q}{q} &= \frac{\gamma-1}{du^\theta} \\
 1 &= \sum_{s=1}^T L_s + \sum_{s=1}^T m_s + u \\
 Y &= C + I
 \end{aligned}$$

3. Prueba de la Proposición 2: De las condiciones de equilibrio a largo plazo obtenemos la siguiente relación sobre el trabajo destinado a mantenimiento entre *vintages*:

$$[1 - \delta_{s-1}(m_{s-1})][-\delta'_s(m_s)] = [-\delta'_{s-1}(m_{s-1})]\gamma^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad s \in [2, T]$$

como $\delta_s = a - c_s m_s^b$, podemos reescribir de la siguiente forma:

$$m_s = m_{s-1} \left(\frac{c_s}{c_{s-1}} \right)^{\frac{1}{1-b}} [1 - \delta_{s-1}(m_{s-1})]^{\frac{1}{1-b}} \gamma^{\frac{-1}{(1-\alpha)(1-b)}}, \quad s \in [2, T]$$

Como $c_s \leq c_{s-1}$, se comprueba directamente que $m_s < m_{s-1}$, para todo $s > 1$. La relación que obtenemos para el trabajo destinado a la producción es:

$$L_s = L_{s-1} [1 - \delta_{s-1}(m_{s-1})] \gamma^{\frac{-1}{1-\alpha}}, \quad s \in [2, T]$$

que implica una secuencia estrictamente decreciente de L_s para $s > 1$ y L_1 dados. Con lo que queda probada la proposición.

4. Prueba de la Proposición 3: Con la especificación elegida para las funciones de depreciación, el sistema de equilibrio a largo plazo queda reducido a dos ecuaciones en términos del trabajo destinado a la adopción y al mantenimiento del *vintage* más nuevo.

$$F(m_1, u) = 1 - u - m_1 - \sum_{s=2}^T m_s(m_1) - \frac{(1 - \alpha)m_1^{1-b}}{\beta\alpha bc_1} \sum_{s=1}^T E_s \gamma^{\frac{2-s}{1-\alpha}} = 0 \quad (14)$$

$$u = f(m_1), \quad f'(u) < 0$$

$$G(m_1, u) = \frac{m_1^{1-b}}{\beta bc_1} \sum_{s=1}^T \beta^s E_s \gamma^{\frac{2-s}{1-\alpha}} - \frac{u[\gamma - \beta(1 - du^\theta)]}{(\gamma - 1)\theta} = 0 \quad (15)$$

$$u = g(m_1), \quad g'(u) > 0$$

La ecuación (14) es la condición de equilibrio en el mercado de trabajo, teniendo en cuenta las condiciones de optimalidad con respecto al trabajo destinado a la producción y al mantenimiento. La ecuación (15) se deriva de la condición de optimalidad de q , y se puede interpretar como una asignación óptima de recursos. Como

$$m_s = m_{s-1} [1 - \delta_{s-1}(m_{s-1})]^{\frac{1}{1-b}} \gamma^{\frac{-1}{(1-\alpha)(1-b)}}$$

$$m_T = 0$$

y

$$E_s = \prod_{j=1}^{s-1} [1 - \delta_j(m_j)]$$

podemos obtener:

$$\frac{\partial m_s}{\partial m_{s-1}} = \frac{m_s}{m_{s-1}} + \frac{m_s [-\delta'_{s-1}(m_{s-1})]}{(1-b)[1 - \delta_{s-1}(m_{s-1})]} > 0$$

Podemos concluir que en la ecuación (14), $\frac{\partial u}{\partial m_1} < 0$ como $\frac{\partial m_s}{\partial m_1} > 0$ y $\frac{\partial E_s}{\partial m_1} > 0$,

donde

$$\lim_{m_1 \rightarrow 0} f(m_1) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{m_1 \rightarrow 1} f(m_1) < 0$$

Por otro lado, diferenciando (15):

$$\left[\frac{(1-b)m_1^{-b}}{\beta b c_1} \sum_{s=1}^T \beta^s E_s \gamma^{\frac{2-s}{1-\alpha}} + \frac{m_1^{1-b}}{\beta b c_1} \sum_{s=1}^T \beta^s \gamma^{\frac{2-s}{1-\alpha}} \left(\frac{\partial E_s}{\partial m_1} \right) \right] dm_1$$

$$- \left[\frac{[\gamma - \beta(1 - du^\theta)]}{(\gamma - 1)\theta} + \frac{\beta d\theta u^\theta}{(\gamma - 1)\theta} \right] du = 0$$

donde el primer término en paréntesis es positivo ya que

$$\left(\frac{\partial E_s}{\partial m_1} \right) > 0 \quad y \quad b < 1$$

El segundo término en paréntesis es también positivo para $\gamma > \beta$, que implica que

$$\frac{\partial u}{\partial m_1} < 0$$

donde

$$\lim_{m_1 \rightarrow 0} g(m_1) = 0$$

Se demuestra fácilmente que $f(m_1)$ es una función decreciente que tiende a 1 cuando $m_1 \rightarrow 0$ y $g(m_1)$ es una función creciente que tiende a 0 cuando $m_1 \rightarrow 0$, y por tanto queda probado que, bajo la condición $\gamma > \beta$, existe una solución única.

5. Prueba de la Proposición 4: De la prueba de la proposición 3 (y principalmente de las ecuaciones (14) y (15)), se puede ver directamente que A no afecta a la distribución de trabajo entre actividades y *vintages*, y como consecuencia tampoco afecta a la brecha tecnológica. Sin embargo, el efecto de un aumento de A es estrictamente positivo para el output (sin tendencia), consumo, inversión y capital agregado, mientras la tasa de inversión se ve alterada, como muestran los cálculos de las derivadas parciales:

$$\frac{\partial x}{\partial A} = \frac{x}{A} \frac{1}{(1-\alpha)} > 0$$

$$\frac{\partial \left(\frac{I}{Y} \right)}{\partial A} = \frac{I}{Y} \left[\frac{\alpha}{1-\alpha} - \frac{\alpha}{1-\alpha} \right] = 0$$