

David Matesanz Gómez*
Guillermo J. Ortega**

COMPLEJIDAD EN LOS MERCADOS CAMBIARIOS. ALGUNAS HERRAMIENTAS DE LA ECONOFÍSICA APLICADAS A LAS CRISIS Y EL CONTAGIO

El objetivo del presente trabajo es mostrar algunas herramientas y métodos procedentes de la econofísica aplicados a los sistemas complejos que son los mercados financieros. Se presentan técnicas en niveles crecientes de complejidad para analizar las crisis cambiarias sufridas durante los años noventa, y, en concreto, para analizar la incidencia de la volatilidad e incertidumbre en la intensidad de las crisis reales y la interdependencia entre dichos mercados y, con ello, la existencia, o no, del fenómeno de contagio. Adicionalmente, el trabajo pretende acercar y difundir algunas de las, poco conocidas, aportaciones de la econofísica.

Palabras clave: econofísica, interdependencia y contagio, volatilidad, comovimientos lineales y no lineales.
Clasificación JEL: C82, F31, F40.

1. Introducción

La econofísica es un campo de investigación interdisciplinario que aplica métodos, herramientas e ideas pro-

cedentes de la física estadística a la resolución de problemas en economía y finanzas (Yakovenko, 2008). El término fue introducido por primera vez por el físico teórico Eugene Stanley, en 1995, en el Congreso Dinámica de los Sistemas Complejos celebrado en Calcuta.

La física estadística estudia sistemas compuestos por una gran cantidad de individuos que interactúan entre ellos y para los que predecir el comportamiento de cada unidad individual sería imposible. Uno de los objetivos de la física estadística es encontrar leyes universales que dirigen el comportamiento conjunto de los sistemas, siendo, hasta cierto punto, independientes del comportamiento individual de cada uno de sus miembros, que

* Departamento de Economía Aplicada. Universidad de Oviedo.

** Departamento de Ciencia y Tecnología. Universidad Nacional de Quilmes y CONICET. Buenos Aires. Argentina.

D. Matesanz agradece a la Fundación del Banco Herrero el apoyo financiero recibido a través de sus ayudas a la investigación en el proyecto *Crisis cambiarias y contagio. Nuevas aportaciones desde la econofísica*. Asimismo los autores agradecen el apoyo financiero de la Universidad Nacional de Quilmes a través del proyecto de investigación UNQ 53/1015 y los valiosos comentarios de un evaluador anónimo.

Versión de enero de 2010.

en economía podemos identificar como *agentes*. En este esquema, además de la microeconomía, la macroeconomía y, especialmente, las finanzas pueden ser entendidas como sistemas complejos (Anderson *et al.*, 1988; Aoki, 1995). Por supuesto, la enorme cantidad de datos disponibles en el campo de las finanzas, especialmente de los mercados de valores y cambiarios, está en la base de que sea esta parte de la economía en la que más se ha interesado la econofísica.

Los primeros trabajos que se pueden considerar en el campo de la econofísica datan de los primeros años noventa (por ejemplo, Mantegna, 1991). Desde entonces este nuevo campo, cruce de caminos entre la física, las matemáticas, la computación y, por supuesto, la economía y las finanzas, ha generado una gran cantidad de artículos de investigación, así como congresos y conferencias, revistas científicas especializadas en el tema e, incluso, estudios de grado relacionados con este nuevo campo. Así, por ejemplo, *Physica A*, *Physical Review Letters*, *Quantitative Finance*, *European Physical Journal B* e *International Journal of Modern Physics C* son algunas de las revistas que han publicado este tipo de trabajos. En el campo de la economía han sido más raras las apariciones de estos artículos, excepto en *Quantitative Finance* y en un monográfico aparecido en *Journal of Economic Dynamics and Control*¹. Diversos y crecientes son el número de congresos y seminarios dedicados a esta rama de investigación. Por ejemplo, en el momento de escribirse este trabajo se celebraron en Brasil y Uruguay, respectivamente, el PAESS 2008 (Physics Applied to Economics and Social Sciences) y la XVI edición del seminario internacional MEDYFINOL 2008 (Conference on Nonequilibrium Statistical Mechanics and Nonlinear Physics). Igualmente, comienza a haber libros relevantes sobre el tema (Mantegna y Stanley, 2000 y Chakrabarti *et al.*, 2006; entre otros) y la *Encyclopedia of Complexity and System Science*, que

aparecerá en Springer con un compendio amplio y detallado de herramientas, ideas y métodos.

El objetivo central de este trabajo es mostrar algunas herramientas de análisis procedentes de la econofísica que han sido aplicadas a los sistemas complejos que son los mercados financieros. Siguiendo a Bonanno *et al.* (2001) se van a mostrar herramientas de la física estadística útiles para el análisis de tres niveles diferentes de complejidad en la dinámica de los precios de los activos financieros. En concreto, se aplican dichas herramientas a los mercados cambiarios, mostrando las ideas, los métodos y los resultados de trabajos nuestros desarrollados en estos tres niveles mencionados. Por tanto, el trabajo no pretende hacer una revisión histórica, teórica o metodológica exhaustiva del campo de la econofísica². Tampoco quiere entrar en el debate entre físicos y economistas sobre la capacidad e interés de la econofísica como rama científica útil en el estudio de los sistemas económicos (detalle de ello puede encontrarse en Yakovenko, 2008; Burda *et al.*, 2003; entre otros). En este sentido, se parte de la premisa de una cierta complementariedad entre ambas ramas de la ciencia con potenciales aportaciones útiles, en este caso, de la física estadística sobre la economía.

Así, el presente artículo muestra la aplicación de estas herramientas, procedentes de la econofísica, al análisis y obtención de información de los tipos de cambio reales (*RER*) de un grupo de 28 países desarrollados y en desarrollo³. La mayor parte de éstos han sufrido crisis cambiarias durante el período de análisis, 1990-2002 (crisis que han sido identificadas en Kaminsky *et al.*, 1998; Pérez, 2005). El Gráfico 1 muestra, normalizadas, las series de tipo de cambio real que hemos utilizado y el momento temporal de las crisis cambiarias identificadas en la literatura. Como puede observarse, algunas de ellas son más

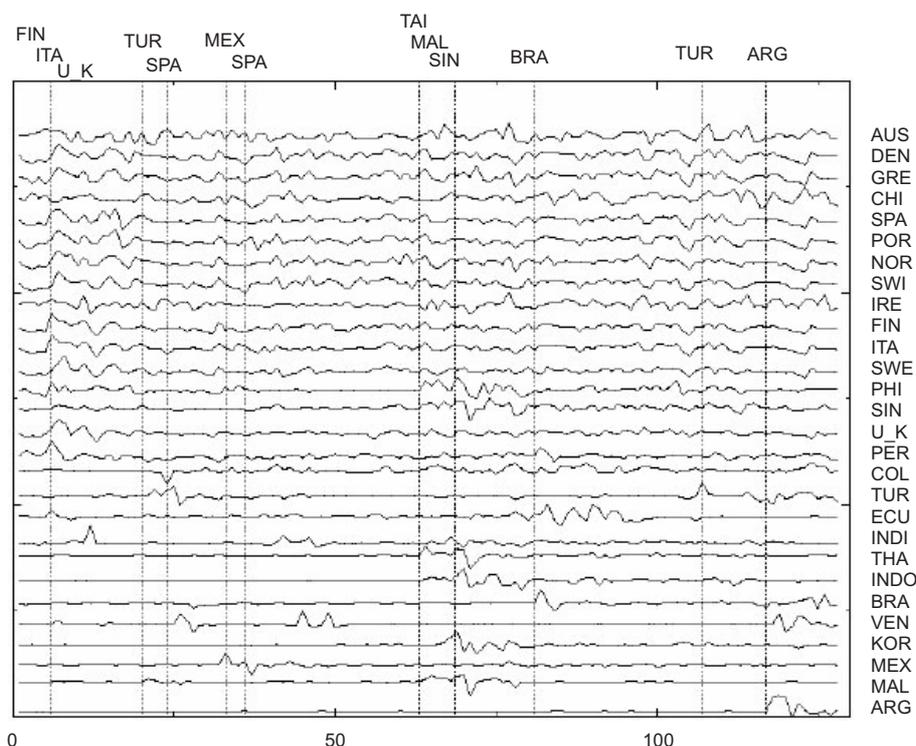
¹ Enero 2008, número 32, *Special issue on applications of statistical physics in economics and finance*.

² Para los interesados en el tema, recomendamos revisar los trabajos del grupo de investigación de Victor Yakovenko, publicados en la *Encyclopedia of Complexity and System Science* y el número 32 monográfico en el tema de *Journal of Economic Dynamics and Control*.

³ Los países y los acrónimos de los mismos figuran en el Anexo A.

GRÁFICO 1

TASA DE CRECIMIENTO DEL TIPO DE CAMBIO REAL ($rRER$),
MARZO 1992-DICIEMBRE 2002



NOTAS: Las líneas verticales marcan la fecha de las crisis cambiarias durante el período de análisis. Los países están ordenados crecientemente según su valor de entropía. Los acrónimos de los países se muestran en el Anexo A.

FUENTE: Elaboración propia.

importantes por la cantidad de países que se vieron afectados, especialmente relevantes son las crisis del sistema monetario europeo a principios de los años noventa y la crisis asiática que se inició en el verano de 1997.

El trabajo se organiza por niveles de complejidad comenzando por el nivel más simple de dinámicas aisladas hasta tener en cuenta las interacciones no lineales existentes entre los distintos países. Así, el siguiente apartado indaga en la relación entre la volatilidad y la incertidumbre en la dinámica de los tipos de cambio reales, y la intensidad que las propias crisis cambiarias

han tenido en la economía real. En este sentido, se analiza un primer nivel de complejidad; la volatilidad e incertidumbre de las variaciones en los mercados cambiarios sin tener en cuenta los flujos de interacción entre los distintos mercados internacionales. El apartado 3 se centra en el análisis de las correlaciones lineales desde el punto de vista de la topología y de los vínculos jerárquicos en estos mercados. En el apartado 4 se analizan estas mismas correlaciones pero con una nueva herramienta no lineal, la Sincronización de Fase (SF), que nos va a permitir obtener una topología y je-

rarquía «estructural» no lineal en estos mercados, evitando los episodios de alta volatilidad, muy útil para el análisis de la existencia, o no, de los efectos de contagio de crisis cambiarias. Para terminar, el trabajo presenta algunas conclusiones.

2. Primer nivel: volatilidad e incertidumbre

Las características más observadas en los precios de los activos en los mercados financieros son: su elevada volatilidad, dispersión e incertidumbre, de tal forma que la predicción de los mismos es altamente complicada, pues la no linealidad en su proceso dinámico es la norma, más que la excepción.

Tradicionalmente la varianza ha sido el momento estadístico más utilizado en economía y finanzas para caracterizar la volatilidad e incertidumbre de las series temporales. Alternativamente, el uso de métodos provenientes de la teoría de la información (Yeung, 2002) se han venido utilizando en economía (especialmente en econometría) en años recientes para medir la volatilidad e incertidumbre. En concreto, la entropía de Shannon (Shannon, 1948) ha demostrado, bajo ciertas condiciones, una mayor eficiencia en su medición y, con ello, en modelizar y predecir los movimientos subyacentes de las series temporales financieras (Maasoumi y Racine, 2002; Ebrahimi *et al.*, 1999).

La varianza y la entropía muestran características diferentes de las series temporales. La varianza mide las desviaciones promedio de la serie temporal respecto de su media. Mientras, la entropía mide el grado en el que la función de distribución de probabilidad está concentrada en un número pequeño, o grande, de intervalos en los que podemos dividir el espacio de variación de la serie temporal. En este sentido, la entropía puede ser considerada como una medida de disparidad de la función de distribución de la serie en relación a una distribución uniforme.

Estadísticamente, la varianza se define como la media de las diferencias cuadráticas de n puntuaciones con respecto a su valor medio:

$$Var(x) = \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} \quad [1]$$

Cuanto mayor es la varianza, más diferencias hay con respecto al valor medio y, por tanto, mayor es la variabilidad y volatilidad.

Por otro lado, siguiendo a Shannon (1948), se puede construir una distribución probabilística $P(x)$ partiendo de la serie original x . La entropía de $P(x)$ entonces se define como:

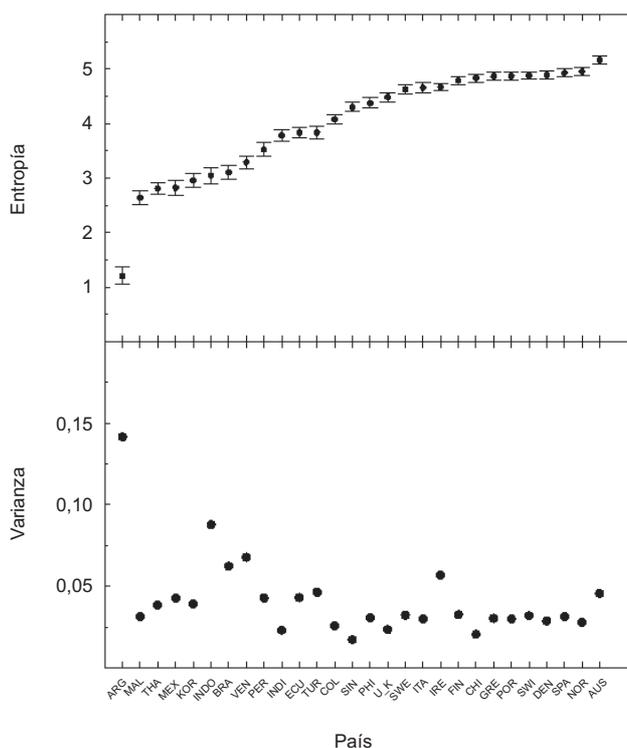
$$H[P(x)] = H(x) = - \sum_{i=1}^{N_{intervals}} p_i \log_2 p_i \quad (2)$$

Donde la suma se realiza sobre los $N_{intervals}$ intervalos en los que el rango completo de valores de x se particiona. Así, p_i es la probabilidad de que cada intervalo sea «ocupado» y se estima como el número de valores de la serie temporal x_i que cae en el intervalo i , n_i , dividido por el número total de intervalos, $n_i/N_{interval}$. Cuando el logaritmo se toma en base 2, como en nuestro caso, las unidades se denominan *bits*. En el ejemplo que se presenta se han utilizado 16 intervalos, $N_{intervals} = 16^4$. Debido al número finito de datos se han calculado los errores observados en los cálculos de entropía siguiendo a Roulson (1999). El máximo error en los cálculos es del 11 por 100.

La entropía mide el grado de «concentración» de la función de probabilidad en valores aislados, y, por lo tanto, puede considerarse como una medida de disparidad de la función de probabilidad estudiada, respecto de la distribución uniforme. A mayor entropía, mayor

⁴ Se ha comprobado que pequeñas variaciones alrededor de este valor (valores de discretización mucho más grandes o pequeños producirían una despoblación o hiperpoblación patológicas en cada intervalo) no han modificado significativamente los resultados. Notar que en la ecuación [2] la entropía es en realidad una función de la función de probabilidad estimada y existen diversas formas de estimar la entropía a partir de un conjunto de datos. En nuestro caso, hemos empleado la más directa y tradicionalmente usada.

GRÁFICO 2
ENTROPÍA Y VARIANZA EN LOS 28 PAÍSES ANALIZADOS



NOTAS: Los países están ordenados según su valor creciente de entropía. Los acrónimos de los países se muestran en el Anexo A. En el orden entrópico se han calculado las barras de error siguiendo a Roulson (1999).
FUENTE: Elaboración propia.

«uniformidad» en la función de probabilidad, y, por lo tanto, mayor incertidumbre. Varianza y entropía miden «disparidades» o «concentraciones», pero de distintas medidas. La varianza respecto al valor medio de la serie temporal (o de su función de probabilidad), y la entropía respecto a la distribución uniforme. En este sentido, la varianza se ha identificado como volatilidad de las series temporales financieras mientras entropía se asimila a incertidumbre y dispersión.

En Matesanz y Ortega (2008a) ambos momentos estadísticos se utilizan para caracterizar los tipos de cam-

bio reales mensuales de nuestro grupo de 28 países, entre enero de 1990 y diciembre de 2002 (156 meses). En ese trabajo se muestra cómo ambas herramientas ordenan los tipos de cambio de los países de forma diferente. El Gráfico 2 reproduce los valores de entropía y varianza para las tasas de crecimiento mensuales de los tipos de cambio reales de nuestro grupo de países. Como puede apreciarse, estos órdenes, a pesar de similares, muestran ciertas diferencias. Por ejemplo, Argentina es el país que muestra la mayor varianza y la menor entropía. Mientras, Indonesia es el sexto país por

orden decreciente de varianza y el segundo por orden creciente de entropía.

Para contrastar la eficiencia de ambos ordenamientos, se correlacionaron el *ranking* de los países ordenados por varianza y entropía, con las caídas anuales del producto interior bruto (PIB) en todos los países después de sus crisis cambiarias⁵. Se estableció un orden creciente para la entropía y un orden decreciente para la varianza, y en ambos, casos se calculó un ajuste de regresión lineal con los valores correspondientes en la caída del PIB anual. En el caso del ordenamiento por varianza decreciente, el coeficiente de correlación lineal con las caídas en el PIB es de 0,55; mientras que en el caso del ordenamiento por entropía creciente es de 0,7, siendo ambos significativos (Matesanz y Ortega, 2008a). Básicamente estos resultados muestran que una alta volatilidad, mostrada por una mayor varianza en el tipo de cambio, está directamente relacionada con una mayor caída del PIB. No obstante, la correlación es aún mejor entre las intensidades de las crisis medidas por la caída del PIB y el ordenamiento por la entropía del tipo de cambio. A menor entropía, mayor caída y crisis más severas.

Por tanto, existe una correlación positiva entre alta varianza (alta volatilidad) en las dinámicas de los tipos de cambio reales e intensidad de las crisis cambiarias, y baja entropía (baja incertidumbre y dispersión) e intensidad de las crisis. En este sentido, entropía y varianza pueden considerarse medidas complementarias aunque, en nuestro caso, los resultados muestran que la relación entre incertidumbre y dispersión y caídas del PIB es mayor que la de la relación de la volatilidad con dichas caídas. En la base de nuestros resultados se encuentra, por supuesto, la elección de regímenes de tipos de cambios

fijos o semifijos que implican una dinámica más «rígida» en el tipo de cambio.

3. Segundo nivel: correlaciones lineales, comovimientos y topología

La presencia de una elevada correlación entre los activos de los mercados financieros a través del tiempo, especialmente las acciones, es una característica de estos mercados que se ha puesto de relevancia desde largo tiempo atrás (Markowitz, 1959 y Elton y Gruber, 1971; entre otros).

El estudio de las matrices de correlación ha puesto de manifiesto que el acoplamiento de dos acciones pertenecientes al mismo sector, en el período de un día de mercado, puede arrojar un coeficiente de correlación tan elevado como el 0,7 (Bonanno *et al.*, 2001). En el campo de la econofísica se han producido muchos trabajos que analizan la matriz de correlaciones y la información que de ella se puede extraer, con el objetivo, evidente, de mejorar la predicción y modelización y, con ello, la selección de carteras de valores más eficientes. Los grupos de acciones e índices y los períodos de análisis, y, su frecuencia, han sido muy variados. El sesgo, sin embargo, ha ido hacia los mercados de valores con frecuencias diarias, o menores, en sus períodos de análisis con el objetivo claro de disponer de un número muy elevado de datos.

Una rama de estos trabajos ha introducido recientemente un método de agrupamiento que permite analizar la topología y taxonomía dentro del grupo de activos financieros analizados. Este método usa el algoritmo de agrupación de asociación al vecino más cercano (*nearest neighbor single linkage clustering algorithm*) (Mardia *et al.*, 1979), basado en la distancia ultramétrica, y permite obtener una agrupación jerárquica de los elementos de análisis sin introducir artificialmente parámetros de *cluster* o umbrales externos. En este sentido, de la matriz de correlaciones de los activos financieros utilizados se obtiene una jerarquía entre sus componentes, así como distintos grupos en su dinámica de acopla-

⁵ En MATESANZ y ORTEGA (2008a) se muestra, en la tabla 1, cómo después de las crisis cambiarias se producen fuertes contracciones del PIB. Por ejemplo, después de la crisis del *bath* tailandés de verano de 1997, el PIB de este país se contrajo, en 2008, un -10,5 por 100; en Argentina, durante 2002, un 10,9 por 100, etcétera. La relación entre crecimiento y tipo de cambio ha sido analizado en numerosos trabajos con diferentes resultados (véase, por ejemplo, CHOU y CHAO, 2001 y CHRISTOPOULOS, 2004).

miento, que permite elaborar mejores predicciones en las carteras. Los trabajos pioneros de Mantegna (1999), Bonanno *et al.* (2001a y 2001b) se centraron en los mercados de valores, tanto en acciones, como por ejemplo las acciones del índice DOW JONES, como entre diversos índices bursátiles mundiales. Más recientemente, este tipo de análisis se ha realizado también sobre tipos de cambio (Ortega y Matesanz, 2006; Mizuno, *et al.*, 2006; Naylor *et al.*, 2007 y Drozd *et al.*, 2007).

La principal ventaja del uso de la distancia ultramétrica como medida de distancia para crear agrupamientos (*clusters*) deriva de que, sin la necesidad de introducir exógenamente umbrales o parámetros de agrupamiento, permite obtener jerarquía y taxonomía entre los elementos considerados de tal forma que éstas son únicas; no es posible construir otros agrupamientos diferentes, por lo que muestra una capacidad de explicación más robusta que otras medidas métricas (que son variadas y pueden presentar distintos agrupamientos). Mantegna y Stanley (2000) y Rammal, *et al.* (1986) son dos buenos trabajos de revisión sobre ultrametricidad, árboles jerárquicos y métodos de agrupamiento.

En Ortega y Matesanz (2006) se analiza la estructura jerárquica de los tipos de cambio reales de nuestro grupo de países inicial, en el período enero 1990-diciembre 2002, con el objeto de indagar en las crisis cambiarias de los años noventa y en los posibles efectos de contagio en dichos mercados. En este trabajo vamos a mostrar los resultados para el período que va desde marzo 1992 a diciembre de 2002 (128 datos) para poder comparar estos resultados con los del apartado siguiente⁶.

El procedimiento es relativamente sencillo (véase Mantegna, 1999; Ortega y Matesanz, 2006 y el Anexo B de este trabajo). Intuitivamente, el MST (del inglés *Minimum Spanning Tree*) nos muestra la correlación más fuerte de cada país (o la primera conexión), independientemente de la magnitud de la misma. Por el contrario, el HT (del inglés *Hierarchical Tree*) indica la intensi-

dad de las conexiones entre los países al ordenarlos en función de sus distancias ultramétricas. En este sentido, el MST nos indica qué países están más conectados o más aislados en función de sus conexiones, y el HT nos representa la intensidad de los comovimientos entre los países, estableciendo un orden jerárquico entre dichos comovimientos.

El Gráfico 3 presenta el MST y el HT del grupo de países de la muestra en el período considerado. Como puede apreciarse, la jerarquía presente en el Gráfico 3 señala claramente tres grupos regionales de países. Los países europeos son los que presentan una mayor cercanía en sus dinámicas, explicado, evidentemente, por su pertenencia al Sistema Monetario Europeo en primer lugar y, después, varios de ellos, al euro. Después, los países asiáticos son un grupo claramente definido donde Tailandia es el país más conectado. Los países latinoamericanos forman un tercer grupo con conexiones mucho más difusas y distantes.

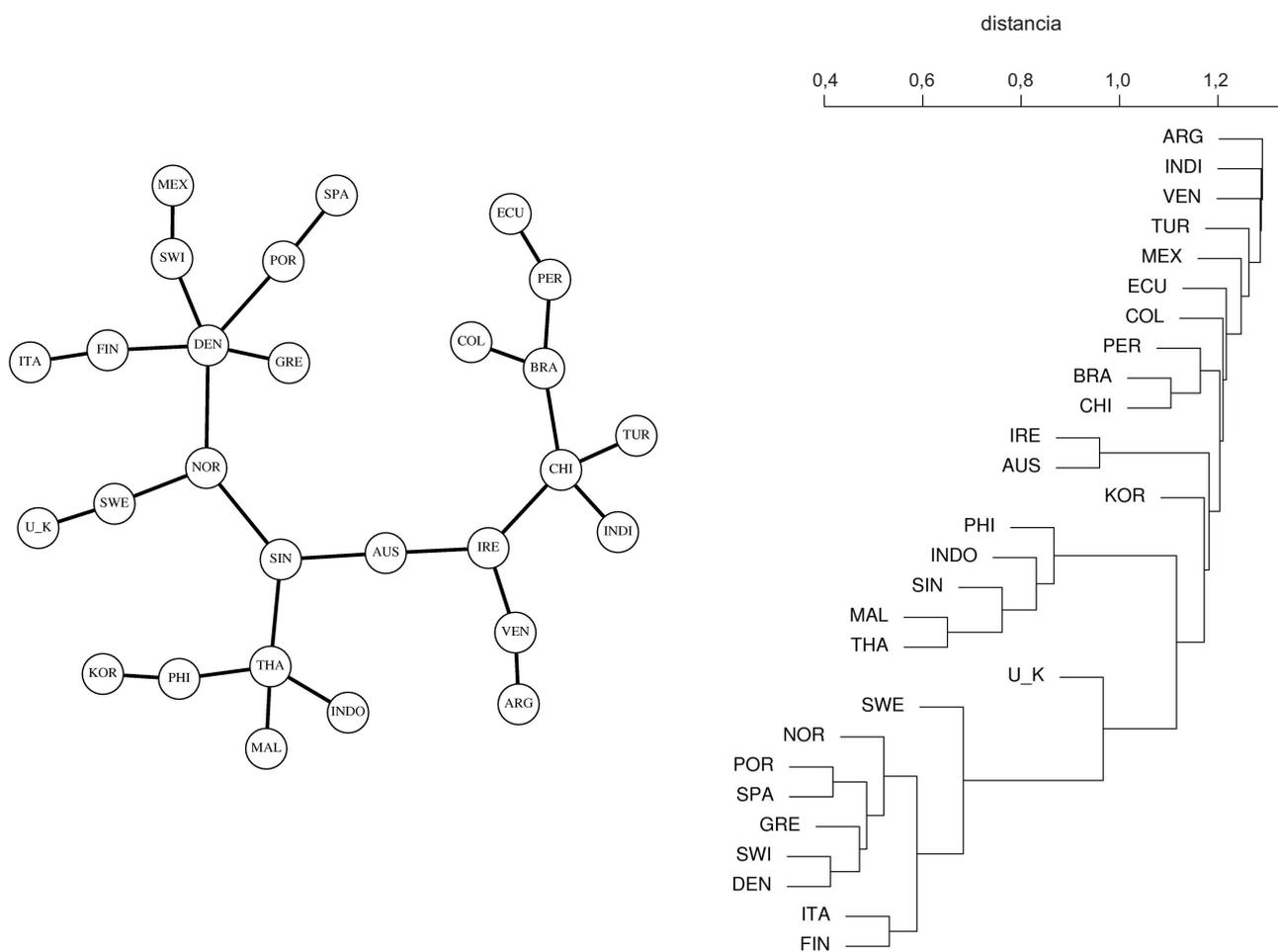
Los países europeos sufrieron entre 1992 y 1995 crisis cambiarias en lo que vino en llamarse las tormentas monetarias; Italia, España, Reino Unido y Dinamarca tuvieron que abandonar el Sistema Monetario Europeo. Es interesante observar cómo Dinamarca es el país más conectado, centro de las dinámicas cambiarias, a pesar de no formar parte del euro⁷. En el grupo asiático, Tailandia es el centro de las conexiones, habiendo sido el país originador de la crisis asiática cuando, en julio de 1997, se desplomó su moneda, el *bath*, y a partir de ahí la crisis se extendió a otros países de la región durante ese año y parte del siguiente, en lo que, se supone, ha sido uno de los episodios de contagio de crisis cambiarias más importantes en la economía mundial. Los países latinoamericanos presentan una mayor dispersión en sus dinámicas, y solo Brasil parece jugar un papel central. Otros países aparecen claramente desconectados del resto, lo que implica dinámicas más propias y menos regionales, tales

⁶ Los resultados en ambos periodos son similares.

⁷ Recordemos que estamos utilizando el tipo de cambio real, lo que incluye, en parte, el ciclo económico.

GRÁFICO 3

COEFICIENTE DE CORRELACIÓN LINEAL. ÁRBOL DE EXPANSIÓN MÍNIMA (MST) Y ÁRBOL JERÁRQUICO (HT), MARZO 1992-DICIEMBRE 2002



NOTA: Los acrónimos de los países se muestran en el Anexo A.
 FUENTE: Elaboración propia.

como Turquía, México o India. Interesante también es la estrecha conexión de Irlanda y Australia que aparece en el Gráfico 3, y se mantiene en otros períodos y con técnicas diferentes como se muestra en Ortega y Matesanz (2006) y Brida *et al.* (2008). El correspondiente dendograma, el HT, del Gráfico 3 corrobora la estructura descri-

ta y la intensidad de los comovimientos a través de las distancias en el eje de ordenadas.

Como resultado económico más interesante, de este tipo de análisis, podemos señalar dos conclusiones parciales. En primer lugar, las dinámicas de los tipos de cambio reales en el período son claramente regionales,

más que globales, donde los grupos muestran una topología y jerarquía regional, señalando que la globalización e integración de estos mercados se está produciendo a través de la creciente integración regional. En segundo lugar, la topología nos señala que en aquellos países que han mostrado ser centros importantes en la dinámica de los *RER*, en el caso de sufrir episodios de crisis o elevada volatilidad podríamos esperar que se pudieran producir efectos de derrame hacia los «vecinos». El caso de Tailandia es evidente: está en el centro de las dinámicas de los países asiáticos y fue, en 1997, el país donde comenzó la intensa crisis financiera y cambiaria, y posteriormente real, en la región.

4. Tercer nivel: correlaciones no-lineales y contagio

Un tercer nivel de análisis de los mercados financieros se basa en la discusión entre el diferente comportamiento estadístico de los activos financieros, de nuevo especialmente las acciones de los mercados de valores, en períodos «normales» y en períodos de alta volatilidad. Estos períodos de alta volatilidad han supuesto crisis importantes en los sistemas financieros mundiales en la última década y media.

Uno de los debates económicos, sin resolver en la actualidad, se deriva de la pregunta de si los vínculos entre los mercados financieros (o entre activos de un mismo mercado) cambian su mecanismo de transmisión de forma abrupta en los episodios de alta volatilidad, produciendo lo que se ha venido a llamar contagio⁸, o bien la extensión de las turbulencias se transmite debido a la (creciente) interdependencia de los mercados (Rigobon, 2003). Este debate tiene implicaciones importantes, tanto para el manejo y posibles soluciones de las crisis, como para la selección de carteras de valores, para la creación de sistemas de alarma temprana para anticipar

estos episodios de crisis y, en general, para el diseño de la arquitectura financiera internacional.

Muchos han sido los trabajos y las metodologías empleadas en dilucidar el debate interdependencia-contagio. Sin embargo, las conclusiones muestran resultados mixtos y no concluyentes (véase, por ejemplo, Dungey *et al.*, 2005; Corsetti *et al.*, 2005 y Gravelle, *et al.*, 2006; entre muchos otros).

El marco de la discusión entre contagio e interdependencia es interesante para las aportaciones procedentes de la econofísica, en relación a la búsqueda de los comovimientos entre activos financieros y las estructuras topológicas y jerárquicas que hemos mostrado en el apartado anterior. Sin embargo, surge un problema de la utilización de correlaciones lineales como medidas de similitud; en la medida en que las grandes oscilaciones se han producido en muchos países al mismo tiempo (sugiriendo el contagio financiero como explicación), estos grandes movimientos son los que pueden estar provocando la estructura de grupos que hemos mostrado y no al revés. Es decir, si no hubieran existido esos períodos de crisis quizá los agrupamientos serían diferentes⁹.

Siguiendo la línea de econofísica centrada en el análisis de topología y jerarquía, hemos introducido una medida nueva en economía que mide correlaciones no lineales de una forma muy especial. En el campo de la econofísica hay pocos trabajos que analicen comovimientos no lineales (dos excepciones son: Darbellay y Wuertz, 2000 y Marschinski y Kantz, 2002; ambas referencias analizan acciones).

En nuestro caso, en Matesanz y Ortega (2008b), hemos introducido el concepto de Sincronización de Fase (SF) como medida de acoplamiento no lineal aplicado a los tipos de cambio reales de la muestra de países.

⁸ La definición más aceptada de contagio es la presentada por KING y WADHWANI (1990) y FORBES y RIGOBON (2002): un cambio importante (incremento) de las correlaciones entre los mercados después de un *shock* en un país o grupo de países.

⁹ Una forma posible para analizar esta cuestión es eliminar del período temporal analizado los momentos de alta volatilidad, pero esto nos lleva a problemas de series cortas, selección de dichos períodos, y, en general, el problema de largos períodos de estabilidad y cortas etapas de volatilidad (ARESTIS *et al.*, 2005).

La SF es un concepto que cuantifica el acoplamiento de fase entre las variables implicadas, independientemente de su amplitud. Lo que hace, en definitiva, es calcular la correlación de «fondo» entre las variables, «como si» las oscilaciones amplias no hubieran existido, pero sin necesidad de definir y eliminar estos períodos de la muestra (en este sentido es en el que se dice que se sincronizan las fases). Este concepto ha sido introducido por primera vez en relación con los osciladores caóticos por Rosenblum *et al.* (1996).

A continuación mostramos la metodología y los resultados derivados de la aplicación de esta nueva herramienta a la economía. El procedimiento es exactamente igual al anterior en el que obteníamos los MST y HT, pero, en este caso, utilizando como medida de similitud, no lineal ahora, la sincronización de fase¹⁰.

Los resultados se presentan en el Gráfico 4. Como puede apreciarse, desde un punto de vista global, encontramos los mismos tres grupos regionales de países, donde los países europeos son los que muestran dinámicas más similares, después el grupo asiático y, finalmente, América Latina como grupo ahora más compacto. Igualmente, Dinamarca, Tailandia y Brasil permanecen como países centro de las dinámicas, y Australia e Irlanda continúan muy conectados. El análisis con la SF nos señala, también, una intensa conexión entre Argentina y Brasil, que no aparecía en el análisis lineal, debido, probablemente, a que ambos países han sufrido varias crisis cambiarias pero en distintos momentos del tiempo, y cuando «eliminamos» esta alta volatilidad temporal, la SF nos muestra la intensa relación existente entre ambas economías.

En cualquier caso, lo relevante es que la topología del Gráfico 4 señala que las conexiones existentes son estables, de largo plazo y, relativamente, independientes de los períodos de alta volatilidad y crisis. Así, se mantienen los bloques regionales tanto en el análisis lineal como en el análisis de fase y los países centro de las di-

námicas siguen siendo los mismos, lo que viene a mostrar que la expansión de las crisis cambiarias durante los años noventa se ha debido a la interdependencia en los mercados y no a efectos puros de contagio, al menos en lo que se refiere a los tipos de cambio reales.

5. Algunas conclusiones

A pesar de que la econofísica todavía no está «bien vista» en el campo de la economía, y sigue habiendo críticas desde ambos lados (véase Yakovenko, 2008 y Burda *et al.*, 2003), lo cierto es que poco a poco algunos de los análisis, métodos y resultados van introduciéndose en la dinámica investigadora de la economía. Probablemente la carencia más relevante del campo sea el hecho de la escasa unión en grupos de trabajo mixtos entre economistas y físicos (y otros posibles miembros como sociólogos, matemáticos o biólogos).

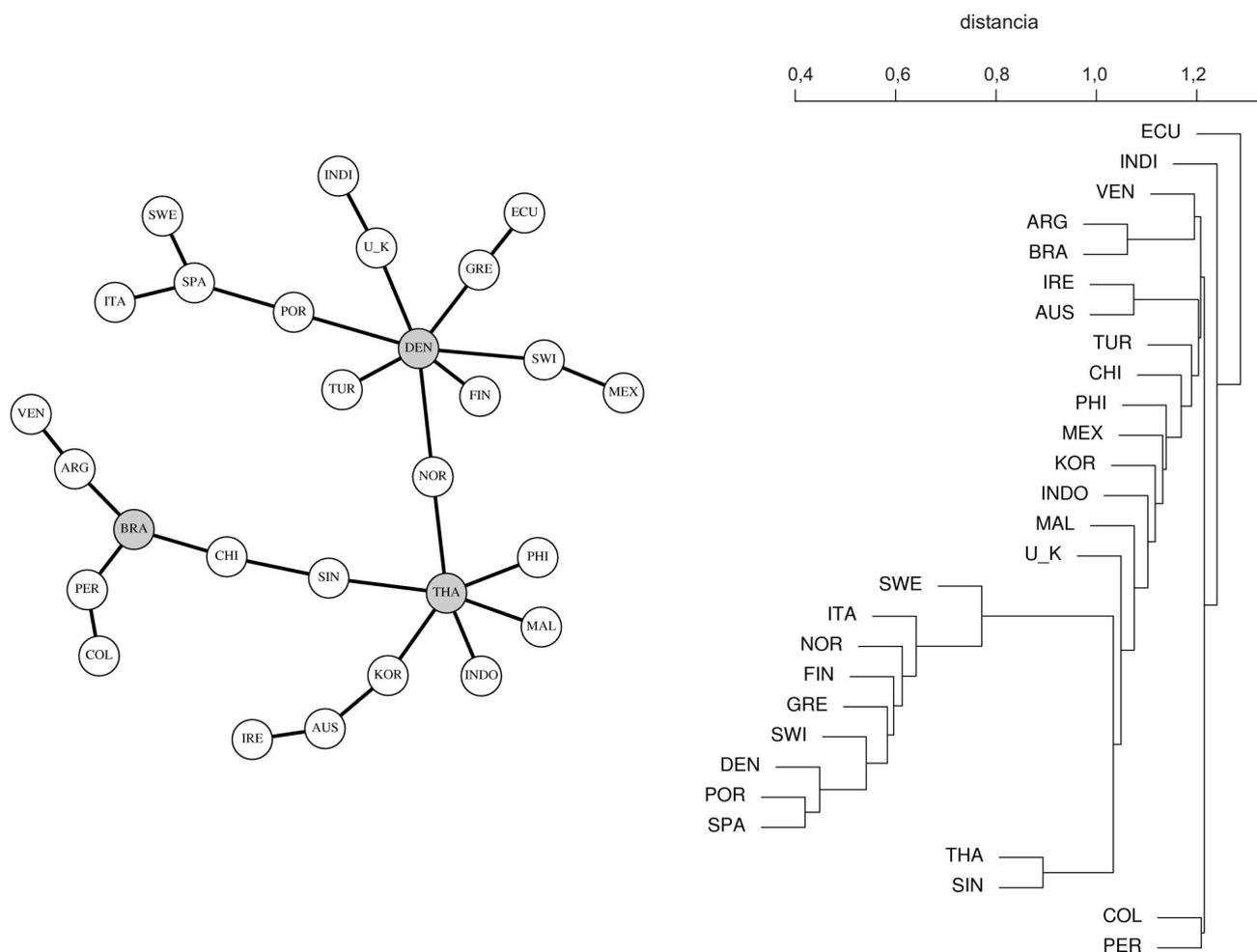
En este trabajo se han mostrado algunas herramientas útiles para el análisis económico de las crisis cambiarias en los últimos años en la arena internacional. La complementariedad con otro tipo de análisis más tradicionales en economía, por ejemplo con los análisis de cointegración, a la par que su sencillez metodológica y facilidad de interpretación de los resultados muestran cómo este tipo de aproximación tiene interés para el análisis económico de carácter más cualitativo.

Nuestros resultados muestran varias conclusiones. En primer lugar, muestran cómo la volatilidad (medida con la varianza), la incertidumbre y la dispersión (medidas con la entropía) de la dinámica de los tipos de cambio real están relacionadas con la intensidad de las contracciones de la actividad económica que siguen a los episodios de crisis cambiarias, y la medición de esta relación es más eficiente con el uso de la entropía que con la tradicional varianza (Matesanz y Ortega, 2008a). Al respecto, y mientras la existencia de datos lo permita, la entropía puede ser una medida complementaria a la medición de la volatilidad.

¹⁰ En el Anexo C, presentamos la formalización matemática de la Sincronización Fase (SF).

GRÁFICO 4

CORRELACIÓN NO LINEAL, SINCRONIZACIÓN DE FASE. ÁRBOL DE EXPANSIÓN MÍNIMA (MST) Y ÁRBOL JERÁRQUICO (HT), MARZO 1992-DICIEMBRE 2002



NOTA: Los acrónimos de los países se muestran en el Anexo A. Los círculos grises muestran los países más conectados de cada región.
 FUENTE: Elaboración propia.

En relación al tema de contagio, nuestros trabajos muestran cómo lo que ha sucedido en los mercados es la extensión de crisis cambiarias de unos países a otros de forma regional y debido, fundamentalmente, a la creciente interdependencia de los mercados (Ortega y Matesanz, 2006; Brida *et al.*, 2008 y Matesanz y Ortega,

2008b). El carácter regional mostrado por las topologías representadas en los Gráficos 3 y 4, alude a que esta interdependencia, y con ello la globalización de los mercados, es más regional que global o, de otra forma, que el aumento del regionalismo es el que está haciendo avanzar la globalización, y los efectos de contagio son una

muestra de esta interdependencia, al menos en los mercados de tipo de cambio, influenciados de alguna manera por el ciclo económico al ser reales.

Desde un punto de vista metodológico, la metodología de agrupamientos puede ser aplicada al campo de la economía regional para los análisis de convergencia regional, tanto en aspectos de crecimiento económico como, por ejemplo, en dinámicas de precios, en dinámicas tecnológicas, etcétera. En la economía del desarrollo y el crecimiento económico pueden ser interesantes, para analizar los vínculos de largo plazo entre, los PIB y las dinámicas regionales de los mismos, o bien los posibles bloques regionales en aspectos de comercio mundial, etcétera.

Asimismo, la metodología de agrupamiento presentada es una herramienta útil para delimitar muestras en distintos análisis. En la medida que la topología muestra una dinámica claramente diferente entre países y regiones puede suceder que los análisis multipaís muestren resultados que queden «tapados» por estas diferencias.

Por último, señalar que estas herramientas pueden ser complementarias de otras más tradicionalmente usadas por los economistas. La entropía y la varianza pueden usarse conjuntamente como medidas alternativas; los métodos de agrupamientos ultramétricos pueden complementar a los métodos tradicionales de *cluster*, así como complementarse y compararse con la cointegración.

Referencias bibliográficas

- [1] ANDERSON, P. W.; ARROW, K. J. y PINES, D. (eds.) (1988): *The Economy as an Evolving Complex System*, ADDISON-WESLEY, Redwood City.
- [2] AOKI, M. (1995): *New Approaches to Macroeconomic Modeling: Evolutionary Stochastic Dynamics, Multiple Equilibria and Externalities as Field Effects*, Cambridge, University Press.
- [3] ARESTIS, P.; CAPORALE, G. M.; CIPOLLINI, A. y SPAGNOLO, N. (2005): «Testing for Financial Contagion Between Developed and Emerging Markets During the 1997 East Asian Crisis», *International Journal of Finance & Economics*, 10 (4), páginas 359-367.
- [4] BONANNO, G.; LILLO, F. y MANTEGNA, R. N. (2001a): «Levels of Complexity in Financial Markets», *Physica A* 299, páginas 16-27.
- [5] BONANNO, G.; LILLO, F. y MANTEGNA, R. N., (2001b): «High Frequency Cross-Correlation in a Set of Stocks», *Quantitative Finance*, 1, páginas 96-104.
- [6] BRIDA, J. G.; MATESANZ, D. y RISSO, W. A. (2008): «Symbolic Hierarchical Analysis in Currency Markets: An Application to Contagion in Currency Crises», *Expert Systems with applications*, en prensa, doi:10.1016/j.eswa.2008.09.038.
- [7] BURDA, Z.; JURKIEWICZ, J. y NOWAK, M. A. (2003): «Is Econophysics a Solid Science?», *Acta Physica Polonica B*, volumen 34, Issue 1, páginas 87-133.
- [8] CHAKRABARTI, B. K.; CHAKRABORTI, A. y CHATTERJEE, A. (eds.) (2006): *Econophysics and Sociophysics Trends and Perspectives* (eds.), WILEY-VCH, Berlin.
- [9] CHOU, L. W. y CHAO, C. C. (2001): «Are Currency Devaluations Effective? A Panel Unit Root Test», *Economics Letters*, 72, páginas 19-25.
- [10] CHRISTOPOULOS, D. K. (2004): «Currency Devaluation and Output Growth: New Evidence From Panel Data Analysis», *Applied Economics Letters*, 11, páginas 809-813.
- [11] CORSETTI, G.; PERICOLI, M. y SBRACIA, M. (2005): «Some Contagion, Some Interdependence: More Pitfalls in Tests of Financial Contagion», *Journal of International Money and Finance*, 24, páginas 1177-1199.
- [12] DARBELLAY, G. A. y WUERTZ, D. (2000): «The Entropy as a Tool for Analysing Statistical Dependences in Financial Time Series», *Physica A*, 287, páginas 429-439.
- [13] DROZDZ, S.; GÓRSKI, A. Z. y KWAPIEN', J. (2007): «World Currency Exchange Rate Cross-correlations», *European Physical Journal B*, 58 (4), páginas 499-502
- [14] DUNGEY, M.; FRY, R. MARTÍN, V. y GONZÁLEZ-HERMOSILLO, B. (2005): «Empirical Modeling of Contagion: A Review of Methodologies», *Quantitative Finance*, 5 (1), páginas 9-24.
- [15] EBRAHIMI, N.; MAASOUMI, E. y SOOFI, E. S. (1999): «Ordering Univariate Distributions by Entropy and Variance», *Journal of Econometrics*, 90 (2), páginas 317-336.
- [16] ELTON, E. J. y GRUBER, M. J. (1971): «Improved Forecasting Through the Design of Homogeneous Groups», *The Journal of Business*, volumen 44 (4), páginas 432-450.
- [17] FORBES, K. J. y RIGOBON, R. (2002): «No Contagion, only Interdependence: Measuring Stock Market Co-movements», *Journal of Finance*, 57 (5), páginas 2223-2261.
- [18] GARCÍA DOMÍNGUEZ, L. *et al.* (2005): «Enhanced Synchrony in Epileptiform Activity? Local Versus Distant Phase Synchronization in Generalized Seizures», *Journal of neuroscience*, 25 (35), páginas 8077-84.
- [19] GOWER, J. C. (1966): «Some Distance Properties of Latent Root and Vector Methods Used in Multivariate Analysis», *Biometrika*, 53, páginas 325-338.

- [20] GRAVELLE, T.; KICHIAN, M. y MORLEY, J. (2006): «Detecting Shift-contagion in Currency and Bond Markets», *Journal of International Economics*, 68, páginas 409-423.
- [21] KAMINSKY, G.; LIZONDO, S. y REINHART, C. M. (1998): «Leading Indicators of Currency Crises», *IMF Staff Papers*, 45, páginas 1-56.
- [22] KING, M. y WADHWANI, S. (1990): «Transmission of Volatility Between Stock Markets», *Review of Financial Studies*, 3 (1), páginas 5-33.
- [23] MAASOUMI, E. y RACINE, J. (2002): «Entropy and Predictability of Stock Market Returns», *Journal of Econometrics*, 107, páginas 291-312.
- [24] MANTEGNA, R. N. (1991): «Levy Walks and Enhanced Diffusion in Milan Stock Exchange», *Physica A*, 179, páginas 232-242.
- [25] MANTEGNA, R. N. (1999): «Hierarchical Structure in Financial Markets», *The European Physical Journal B*, 11, páginas 193-197.
- [26] MANTEGNA, R. N. y STANLEY, H. E. (2000): *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*, University Press, Cambridge.
- [27] MARDIA, K. V.; KENT, J. T. y BIBBY, J. M. (1979): *Multivariate Analysis*, Academic Press, San Diego, CA.
- [28] MARKOWITZ, M. (1959): *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment*, Wiley, New York.
- [29] MARSCHINSKI, R. y KANTZ, H. (2002): «Analysing the Information Flow Between Financial Time Series. An Improved Estimator for Transfer Entropy», *European Physical Journal B*, 30, páginas 275-281.
- [30] MATESANZ, D. y ORTEGA, G. J. (2008a): «A (Econophysics) Note on Volatility in Exchange Rate Time Series. Entropy as a Ranking Criterion», *International Journal of Modern Physics C*, 19 (7), páginas 1095-1103.
- [31] MATESANZ, D. y ORTEGA, G. J. (2008b): «Network Analysis of Exchange Data: Interdependence Drives Crisis Contagion», *Documento de trabajo FUNCAS*, 396, en http://www.funcas.ceca.es/Publicaciones/Documentos_Trabajo.asp.
- [32] MIZUNO, T.; TAKAYASU, H. y TAKAYASU, M. (2006): «Correlation Networks Among Currencies», *Physica A*, 364, páginas 336-342.
- [33] MORMANN, F.; LEHNERTZ, K.; DAVID, P. y ELGER, C. E. (2000): «Mean Phase Coherence as a Measure for Phase Synchronization and its Application to the EEG of Epilepsy Patients», *Physica D*, 144, páginas 358-369.
- [34] NAYLOR, M. J.; ROSE, L. C. y MOYLE, B. J. (2007): «Topology of Foreign Exchange Markets using Hierarchical Structure Methods», *Physica A*, 382, páginas 199-208.
- [35] ORTEGA, G. J. y MATESANZ, D. (2006): «Cross-country Hierarchical Structure and Currency Crises», *International Journal of Modern Physics, C* 17 (3), páginas 333-341.
- [36] PÉREZ, J. (2005): «Empirical Identification of Currency Crises: Differences and Similarities Between Indicators», *Applied Financial Economics Letters*, 1 (1), páginas 41-46.
- [37] RAMMAL, R.; TOULOUSE, G. y VIRASORO, M. A. (1986): «Ultrametricity for Physicists», *Review of Modern Physics*, 58 (3), páginas 765-788.
- [38] RIGOBON, R. (2003): «On the Measurement of International Propagation of Shocks: Is the Transmission Stable?», *Journal of International Economics*, 61, páginas 261-283.
- [39] ROSENBLUM, M. G. et al. (2001): *Phase Synchronization: From Theory to Data Analysis*, in: F. MOSS and S. GIELEN (eds.), «Handbook of biological physics», Elsevier Science, Amsterdam.
- [40] ROSENBLUM, M. G.; PIKOVSKY, A.S. y KURTHS, J. (1996): «Phase Synchronization of Chaotic Oscillators», *Physical Review Letters*, 76, páginas 1804-1807.
- [41] ROULSON, M. S. (1999): «Estimating the Errors on the Measured Entropy and Mutual Information», *Physica D*, 125, páginas 285-294.
- [42] SHANNON, C. (1948): «A Mathematical Theory of Communication», *Bell Systems Tech.*, 27, páginas 379-423.
- [43] YAKOVENKO, V. M. (2008): «Econophysics, Statistical Mechanics Approach to», *Encyclopedia of Complexity and System Science*, Springer, en prensa, available online <http://arxiv.org/abs/0709.3662>.
- [44] YEUNG, R. W. (2002): *A First Course in Information Theory in Information Technology: Transmission, Processing, and Storage*, Series Editor: JACK KEIL WOLF, Springer (Kluwer Academic/Plenum Publishers).

ANEXO A

Acrónimos de los países

Los 28 países analizados están ordenados por valores crecientes de entropía y son:

Argentina (ARG), Malasia (MAL), Tailandia (THA), México (MEX), Korea (KOR), Indonesia (INDO), Brasil (BRA), Venezuela (VEN), Perú (PER), India (INDI), Ecuador (ECU), Turquía (TUR), Colombia (COL), Singapur (SIN), Filipinas (PHI), Reino Unido (U_K), Suecia (SWE), Italia (ITA), Irlanda (IRE), Finlandia (FIN), Chile (CHI), Grecia (GRE), Portugal (POR), Suiza (SWI), Dinamarca (DEN), España (SPA), Noruega (NOR), Australia (AUS).

ANEXO B

Jerarquía y topología lineal

Para cuantificar el grado de similitud entre cada par de tipos de cambio reales pertenecientes a diferentes países hemos calculado el coeficiente de correlación de Pearson, ρ_{ij} , entre cada par de *RER* según la fórmula:

$$\rho_{i,j} = \frac{\sum_{k=1}^{N_{win}} (x_i(k) - \bar{x}_i)(x_j(k) - \bar{x}_j)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N_{win}} (x_i(k) - \bar{x}_i)^2 \sum_{k=1}^{N_{win}} (x_j(k) - \bar{x}_j)^2}} \quad [A.1]$$

En nuestro caso, $\bar{x}_i = x_i(k)$, $k = 1, N_{dat}$ corresponde a cada una de las tasas de crecimiento mensual de los tipos de cambio reales, $rRER_i(k)$, así, $1 \leq i \leq 28$ es el índice del país considerado, y $1 \leq k \leq N_{dat}$ el mes.

ρ_{ij} es una medida de interdependencia lineal en la que altos valores de ρ reflejan correlación entre las variables, y bajos valores de ρ reflejan ausencia de correlación. En nuestros cálculos hemos utilizado el valor absoluto de ρ_{ij} .

Una vez obtenida la matriz de correlación lineal (de 28 filas por 28 columnas) necesitamos construir un espacio ultramétrico. Para ello, necesitamos una matriz de distancias métricas a partir de la matriz de correlaciones. Siguiendo a Gower (1966), definimos la distancia $d(i,j)$ entre dos tipos de cambio reales x_i y x_j como:

$$d(i,j) = \sqrt{\chi_{i,i} + \chi_{j,j} - 2\chi_{i,j}} = \sqrt{2(1 - \chi_{i,j})} \quad [A.2]$$

Donde χ_{ij} es la correlación lineal ρ_{ij} . La matriz de distancias¹, $d(i,j)$, así medida cumple los tres axiomas de cualquier distancia:

- $d(i,j) = 0$ si y sólo si $i = j$
 - $d(i,j) = d(j,i)$
 - $d(i,j) \leq d(i,l) + d(l,j)$
- [A.3]

¹ De nuevo la matriz de distancias tiene 28 filas por 28 columnas. En este caso, la diagonal es cero, mientras que en la matriz de correlaciones es 1.

ANEXO B (continuación)

Jerarquía y topología lineal

El tercer axioma, la desigualdad triangular caracteriza un espacio métrico. Un espacio ultramétrico, por otro lado, obedece a una desigualdad triangular más fuerte, de tal forma que la distancia ultramétrica $d(i,j)^<$ es:

$$d(i,j)^< \leq \text{Max} \{ d(i,l), d(l,j) \} \quad [\text{A.4}]$$

La distancia ultramétrica, $d(i,j)^<$, puede ser obtenida directamente de la matriz de distancias, $d(i,j)$, que hemos calculado previamente a través del método del MST. En concreto, dado un espacio métrico (Ω, d) , donde el tipo de cambio real de cada país son los elementos de Ω y d la distancia medida por la ecuación [A.4], se puede construir un gráfico con Ω vértices y conexiones entre los elementos (i,j) , definidas por la distancia $d(i,j)$. Aunque se puede construir más de un MST, la distancia ultramétrica, $d^<$, derivada de Ω es única. Con la información del MST, la distancia ultramétrica, $d(i,j)^<$, entre dos elementos i y j es (Rammal, *et al.* 1986):

$$d(i,j)^< \leq \text{Max} \{ d(w_i, w_{i+1}), 1 \leq i \leq n - 1 \} \quad [\text{A.5}]$$

Donde: $C_{ij} = \{(w_1, w_2), (w_2, w_3), \dots, (w_{n-1}, w_n)\}$ es el único camino posible entre dos países i y j ($w_1 = i$; $w_n = j$). La construcción de nuestro MST (Gráficos 3 y 4) es muy sencilla, por medio del algoritmo de Kruskal. Una vez obtenida la matriz de distancias métricas, éstas se ordenan de menor (mayor correlación) a mayor (menor correlación) y se van uniendo los países por *links* entre los mismos según este ordenamiento. Así, en el Gráfico 3, DEN y SWI muestran la distancia más corta y se unen por un *link*. Después, SPA y POR tienen la menor distancia y quedan unidos formando inicialmente otro *cluster*. GRE y DEN muestran la siguiente menor distancia y así se une GRE a DEN y SWI. POR y DEN son el siguiente par de países con menor distancia y se unen de forma que ahora los países europeos forman un solo *cluster* si bien con una intensidad en los co-movimientos distinta. Así avanzando en el ordenamiento creciente de distancias se va construyendo el MST y se va creando el árbol de expansión mínima. Recorriendo el ordenamiento de distancias, a medida que aparece un nuevo país que no figura en el MST construido hasta ese momento, se va agregando al MST ligándolo al país con el que está correlacionado en el ordenamiento. Notar que la información provista por el MST es ambigua respecto a las intensidades de acoplamiento; así, DEN y SWI aparecen unidas al mostrar cada país la correlación más intensa en sus tipos de cambio y lo mismo ocurre con, por ejemplo, ECU y PER aunque la intensidad de la correlación en estos países es mucho menor. Con el objeto de visualizar mejor las intensidades de acoplamiento se construye el HT a través de las distancias ultramétricas. Así, como hemos señalado antes, la distancia ultramétrica entre cualquier par de países del MST es la mayor distancia que hay entre cada par de países en el camino entre ellos, moviéndonos a lo largo de la línea más corta. Así por ejemplo, aunque ECU y PER están directamente conectados en el MST no aparecen juntos en el HT pues Ecuador muestra una distancia ultramétrica mayor con el resto de países que Perú.

En este sentido, la información de ambos grafos es complementaria: mientras el MST nos muestra la conexión más intensa (mayor correlación) de cada país con otro, el HT muestra la intensidad de las conexiones a través del orden jerárquico que impone la distancia ultramétrica.

ANEXO C

Sincronización de fase

El procedimiento es completamente igual al mostrado en el Anexo B, pero la medida de correlación utilizada es la sincronización de fase, en vez del coeficiente de correlación de Pearson. Por tanto, se calcula la matriz de correlaciones a partir de la sincronización de fase y el resto del procedimiento es igual al anterior: se calcula de la misma forma que antes la matriz de distancias, la matriz de distancias ultramétricas y, a partir de ellas, el MST y los HT.

La Sincronización de Fase es un concepto que fue introducido por Rosenblum *et al.* (1996) en relación a los osciladores caóticos y que se ha venido utilizando crecientemente en el campo de la neurociencia (García Domínguez *et al.*, 2005 y Rosenblum *et al.*, 2001). La capacidad del método es que mide la relación entre distintas fases, independientemente de su amplitud.

A efectos de evaluar la diferencia entre las fases de las series temporales consideradas, debemos definir, primeramente, la fase instantánea de una señal. Para ello se usa el concepto de señal analítica, como mostramos a continuación. Para una señal continua en el tiempo, asociamos a ella una señal compleja definida como:

$$z_i(t) = x_i(t) + i\tilde{x}_i(t) = A_i(t)e^{i\phi_i(t)}$$

Donde: $\tilde{x}_i(t)$ es la transformada de Hilbert de $x_i(t)$, tal que:

$$\tilde{x}_i(t) = \frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_i(t')}{t-t'} dt' \tag{A.6}$$

Donde *v.p.* significa valor principal (en el sentido de Cauchy). La fase instantánea es por lo tanto:

$$\phi_i(t) = \arctan \frac{\tilde{x}_i(t)}{x_i(t)}$$

Y la diferencia de fase entre dos señales puede ser calculada por medio:

$$\Delta\phi_{i,j} = \phi_i(t) - \phi_j(t) = \arctan \frac{\tilde{x}_i(t)x_j(t) - x_i(t)\tilde{x}_j(t)}{\tilde{x}_i(t)x_j(t) + x_i(t)\tilde{x}_j(t)}$$

Para poder aplicar numéricamente los resultados anteriores sobre dos series temporales $\tilde{x}_i(k)$ y $\tilde{x}_j(k)$, hemos calculado la coherencia de fase media (R_{ij}) (Mormann *et al.*, 2000):

$$R_{ij} = \left| \frac{1}{N_{dat}} \sum_{k=1}^{N_{dat}} e^{i\Delta\phi_{ij}(k)} \right| \tag{A.7}$$

Calculada en ventanas temporales de N_{dat} , donde: $\Delta\phi_{ij}(k) = \phi_i(k) - \phi_j(k)$ es la diferencia de fase instantánea en el tiempo discreto k . Se ve claramente de la ecuación [A7] que R_{ij} sigue la misma relación que la ecuación [A1], esto es $0 \leq R_{ij} \leq 1$. Se puede ver en la literatura (Rosenblum *et al.*, 2001) como calcular numéricamente la transformada de Hilbert de la serie temporal.

La sincronización de fase y por lo tanto R_{ij} cuantifica el acoplamiento de fases entre las variables involucradas, independientemente de las amplitudes. Por lo tanto, es especialmente útil cuando una o ambas variables contienen cambios abruptos, como por ejemplo en las crisis. En este sentido, la aportación de este tipo de correlación es que evalúa los comovimientos «de fondo» de las series, evitando, sin eliminarlos de las series, los saltos abruptos en las mismas.